บทที่ 8
อนุกรมฟูเรียร์ (ฟูริเยร์)

" เว่ยเส้าเทียน
วันนี้ วันตายของเจ้า "

" โอหัง
แน่จริงก็เข้ามา
... เอี๊ยออ "

CHAPTER8

อนุกรมฟูเรียร์
Fourier Series

“ใครมันจะไปสำเร็จตั้งแต่ครั้งแรก”

- ฐิตินันท์ EE52 (aka filmm_ts), เกือบได้มีไม้สี่

I never make the same mistake twice !

ย้อนกลับไปในตอนที่ผู้เขียนได้ยินเกี่ยวกับอนุกรมฟูเรียร์เป็นครั้งแรก ผู้เขียนรู้สึก อึ้ง ! และ ทึ่ง !! มากๆ **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (ขอเรียกชื่อท่านสั้นๆว่า ฟูเรียร์) สามารถพิสูจน์ให้ชาวโลกได้รับรู้ว่า “สัญญาณใดๆ ที่มีลักษณะเป็นรายคาบนั้น สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ได้” ย้อนกลับไปในสมัยที่ มหาจอมจักรพรรดิ “นโปเลียน” ครองทวีปยุโรป เขาได้ทำการส่งที่ปรึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ “ฟูเรียร์” ไปทำงานที่ประเทศอียิปต์ และ (เดาว่าบรรยากาศพาไป) ท่านจึงมุ่งความสนใจไปในเรื่องของความร้อน ฟูเรียร์พยายามจะนำเสนอทฤษฎีการแพร่และนำความร้อนในสสาร โดยใช้สมมุติฐานตามข้อความที่ขีดเส้นใต้ไว้ข้างต้น ผู้ทรงคุณวุฒิชื่อดังในสมัยนั้น ซึ่งรวมไปถึง ลากรานจ์ และ พัวส์ซอง ไม่ยอมรับทฤษฎีดังกล่าว และสั่งห้ามไม่ให้มีการเผยแพร่ ณ เพลานั้น ทฤษฎีของฟูเรียร์จึงเป็นเพียงแค่สมมุติฐาน แต่อย่างไรก็ตาม ความจริงเป็นสิ่งไม่ตาย ! ความจริงก็ยังคงเป็นความจริงอยู่วันยังค่ำ !! นับจากนั้นไม่นานนัก ท่านก็ได้รับรางวัลงานวิจัยยอดเยี่ยมจากผลงานในเรื่องดังกล่าว และ มอบมรดกอันสุดแสนคลาสสิคเอาไว้ให้แก่ชาวโลก ซึ่งเป็นตำราที่มีชื่อว่า analytic theory of heat ในปัจจุบัน สมมุติฐานที่เคยไม่ได้รับการยอมรับของฟูเรียร์ ถูกประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางและแพร่หลายในทุกแวดวง อาทิเช่น การประมวลผลสัญญาณดนตรี การแก้ปัญหาในทางกลศาสตร์ควอนตัม รวมไปถึงเรื่องคลื่น ซึ่งครอบคลุมทุกคลื่น แม้กระทั่งคลื่นจากหลุมดำ !!

8.1 นิยามของอนุกรมฟูเรียร์ (Definition of Fourier Series)

ฟูเรียร์ได้พิสูจน์ให้เห็นว่า ฟังก์ชันรายคาบ (หรือสัญญาณรายคาบ) ทุกฟังก์ชันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันไซน์หรือฟังก์ชันโคไซน์ได้ สำหรับหัวข้อแรกในบทนี้ เราจะมาเรียนรู้และเข้าใจว่าสัญญาณรายคาบ จะถูกเขียนด้วยสัญญาณไซน์และสัญญาณโคไซน์ ตามที่ฟูเรียร์กล่าวไว้ ได้อย่างไร

ถ้า

สัญญาณ $f(t)$ เป็น**สัญญาณรายคาบ** ซึ่งมี

ความถี่เชิงมุมมูลฐาน $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ rad/s และ ความถี่ (เชิงเส้น) $f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ Hz

เราสามารถเขียนสัญญาณรายคาบข้างต้น ให้อยู่ในรูป**อนุกรมฟูเรียร์** ได้ ดังนี้

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right) \tag{8.1}$$

โดยที่ **สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์** (Fourier coefficient) ทั้งสามค่า จะถูกหาค่าได้ดังต่อไปนี้

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt \tag{8.2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \tag{8.3}$$

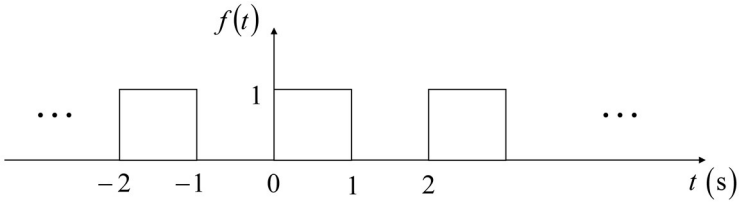
$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \tag{8.4}$$

สัญลักษณ์ $\int_T f(t)\,dt$ หมายความถึง การหาปริพันธ์สัญญาณ $f(t)$ บนช่วงเวลา 1 คาบ

---

*หากผู้อ่านสนใจที่มาที่ไปของการได้มาซึ่งอนุกรมฟูเรียร์และสัมประสิทธิ์ทั้งสามค่าที่กล่าวถึงในนิยามข้างต้น ท่านสามารถ google ด้วยคำว่า ‘derivation Fourier series coefficients’ ได้

ตัวอย่างที่ 8.1-1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



ภาพที่ 8.1 สัญญาณรายคาบสำหรับตัวอย่างที่ 8.1-1

พิจารณาสัญญาณเพียง 1 คาบ บนช่วง $[0,2]$ วินาที เราจะเขียนอธิบายสัญญาณดังกล่าวได้เป็น

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 0, & 1<t\le 2\end{cases}$$

เราจะเริ่มโดยการเขียนถึงพารามิเตอร์พื้นฐานทั้งหมดของสัญญาณรายคาบข้างต้น ดังนี้

คาบของสัญญาณ $T=2$ s

ความถี่เชิงมุมมูลฐาน $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ rad/s

ความถี่(เชิงเส้น)มูลฐาน $f_0=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2}=0.5$ Hz

ขั้นตอนแรก เราจะหาค่าของ a_0 จากสมการที่ (8.2)

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\;dt+\int_1^2 0\;dt\right)\\&=\frac{1}{2}\left(t\big|_0^1+0\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ในลำดับถัดไป เราจะหาค่าของ a_n จากสมการที่ (8.3)

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\\&=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos\left(n(\pi)t\right)dt\\&=\int_0^1 1\cdot\cos(n\pi t)\,dt+\int_1^2 0\cdot\cos(n\pi t)\,dt\\&=\left.\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right|_0^1+0\\&=\frac{\sin(n\pi(1))}{n\pi}-\frac{\sin(n\pi(0))}{n\pi}\\&=\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}-0\quad;\ \sin(n\pi)=0,\ n=1,2,\ldots\\&=0\end{aligned}$$

ส่วนสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ b_n ก็หาได้จากสมการที่ (8.4) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n(\pi)t)\,dt \\
&= \int_0^1 1\cdot\sin(n\pi t)\,dt + \int_1^2 0\cdot\sin(n\pi t)\,dt \\
&= -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\Bigg|_0^1 + 0 \\
&= \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\right) - \left(-\frac{\cos(0)}{n\pi}\right) \\
&= \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\right) + \frac{1}{n\pi} \\
&= \left(-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right) + \frac{1}{n\pi} \qquad ; \text{พฤติกรรมของ } \cos(n\pi) \text{ แสดงด้วยตารางที่ 8.1} \\
&= \left(\frac{(-1)^1(-1)^n}{n\pi}\right) + \frac{1}{n\pi} \\
&= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\right) + \frac{1}{n\pi} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}
\end{aligned}
$$

ตารางที่ 8.1 ตัวอย่างการแทนค่าเพื่อสรุปว่า $\cos(n\pi) = (-1)^n$

n	$\cos(n\pi)$	$(-1)^n$
1	$\cos(1\cdot\pi) = \cos(180^\circ) = -1$	$(-1)^1 = -1$
2	$\cos(2\cdot\pi) = \cos(360^\circ) = 1$	$(-1)^2 = 1$
3	$\cos(3\cdot\pi) = \cos(540^\circ) = -1$	$(-1)^3 = -1$
4	$\cos(4\cdot\pi) = \cos(720^\circ) = 1$	$(-1)^4 = 1$

พิจารณาสมการที่ (8.1) อนุกรมฟูเรียร์สำหรับสัญญาณในภาพ 8.1 จึงเขียนได้เป็น

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{(0)}_{a_n}\cdot\cos\left(n\underbrace{(\pi)}_{\omega_0}t\right)+\underbrace{\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\right)}_{b_n}\sin\left(n(\pi)t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\right)\sin(n\pi t)\right)$$

เมื่อเราได้สมการข้างต้น ก็ถือเป็นอันเสร็จสิ้นกระบวนการหาอนุกรมฟูเรียร์
จากจุดนี้เราพยายามจะอธิบายเพิ่มเติม โดยการลองกระจายผลบวกซิกมา
และอย่าลืมนะว่า ตัวแปร n ของอนุกรมฟูเรียร์ คือตัวแปรที่มีค่าเป็นจำนวนนับ $n=1,2,\ldots$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\right)\sin(n\pi t)\right)$$

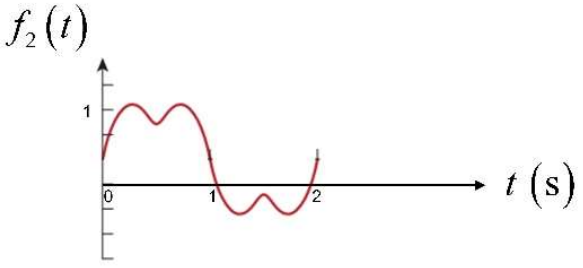
$$=\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{(-1)^{(1)+1}+1}{(1)\pi}\right)\sin((1)\pi t)}_{n=1}+\underbrace{\left(\frac{(-1)^{(2)+1}+1}{(2)\pi}\right)\sin((2)\pi t)}_{n=2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)+0\cdot\sin(2\pi t)+\underbrace{\frac{2}{3\pi}\cdot\sin(3\pi t)}_{n=3}+\underbrace{0\cdot\sin(4\pi t)}_{n=4}+\cdots$$

เราจะเรียก พจน์ที่เกิดจาก $n=3$ ว่าพจน์ที่ 3 และ พจน์ถัดไปๆ ก็จะถูกเรียกในทำนองเดียวกัน
ถ้าเราพิจารณา $f(t)$ จนถึงพจน์ที่ 3 เราจะได้ว่า

$$f_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)+0+\frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

โดยตัวห้อยใต้ฟังก์ชันสื่อถึงว่า เราพิจารณา $f(t)$ ถึงเพียงแค่พจน์ที่ 3 เท่านั้น
และสัญญาณ $f_3(t)$ มีภาพเป็นดังนี้



ภาพที่ 8.2 สัญญาณ $f_3(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 8.1-1

หากพิจารณาอนุกรมฟูเรียร์จนถึงพจน์ที่ 21

$$f_{21}(t)=\frac{1}{2}+\frac{2\sin(\pi t)}{\pi}+\frac{2\sin(3\pi t)}{3\pi}+\cdots+\frac{2\sin(21\pi t)}{21\pi}$$

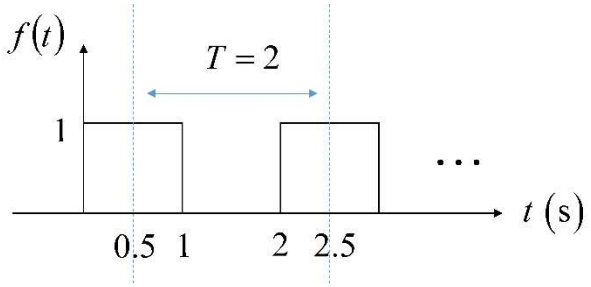
ภาพของสัญญาณดังกล่าวเป็นดังนี้

ภาพที่ 8.3 สัญญาณ $f_{21}(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 8.1-1

หากเราเปรียบเทียบภาพที่ 8.3 ภาพที่ 8.2 และ ภาพที่ 8.1 เราจะเชื่อได้อย่างสนิทใจว่า ...

"สัญญาณใดๆ ที่มีลักษณะเป็นรายคาบนั้น สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ได้"

ตัวอย่างที่ 8.1-2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบในภาพที่ 8.1 อีกครั้ง แต่ให้ทำการพิจารณาการหาสัมประสิทธิ์ โดยใช้ภาพสัญญาณ 1 คาบ บนช่วงเวลา $[0.5, 2.5]$ ดังแสดงในภาพที่ 8.4



ภาพที่ 8.4 สัญญาณ $f(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 8.1-2

พารามิเตอร์ของสัญญาณในภาพที่ 8.4 นี้ยังคงเหมือนกับสัญญาณในภาพที่ 8.1 ทุกประการ

$T=2$ s, $\omega_0=\pi$ rad/s และ $f_0=0.5$ Hz

แต่ทว่า ฟังก์ชันสำหรับสัญญาณในภาพที่ 8.4 จะต้องเขียนใหม่เป็น

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0.5\le t\le 1\\ 0, & 1<t<2\\ 1, & 2\le t\le 2.5\end{cases}$$

ฟังก์ชันข้างต้นจะแตกต่างกับฟังก์ชันสำหรับสัญญาณในภาพที่ 8.1

ผู้เขียนตั้งใจจะแสดงให้เห็นด้วยตัวอย่างนี้ว่า

"ไม่ว่า เราจะใช้ช่วงเวลาในการพิจารณาสัญญาณ 1 คาบเป็นช่วงเวลาใดก็ตาม อนุกรมฟูเรียร์ก็จะมีค่าเท่ากัน หรือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ที่ได้ก็จะมีค่าเท่ากัน"

สำหรับ a_0 รายละเอียดเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{0.5}^{T} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0.5}^{2.5} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{0.5}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{2.5} 1\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(t\big|_{0.5}^{1} + 0 + t\big|_{2}^{2.5}\right) \\
&= \frac{1}{2}(0.5 + 0 + 0.5) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

เราจะได้ว่า (*ข้อมูลนี้จะใช้ในการหา a_n)

$$\begin{aligned}
\sin(5n\pi/2) &= \sin\left(\underbrace{4n\pi/2}_{a} + \underbrace{n\pi/2}_{b}\right) \\
&= \sin(2n\pi)\cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2)\cos(2n\pi) \\
&= 0\cdot\cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2)\cdot 1 \\
&= \sin(n\pi/2)
\end{aligned}$$

สำหรับ a_n วิธีทำเป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \int_{0.5}^{1} 1\cdot\cos(n\pi t)\,dt + \int_{1}^{2} 0\cdot\cos(n\pi t)\,dt + \int_{2}^{2.5} 1\cdot\cos(n\pi t)\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_{0.5}^{1} + 0 + \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_{2}^{2.5} \\
&= \left(\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\right) + \left(\frac{\sin(5n\pi/2)}{n\pi} - \frac{\sin(2n\pi)}{n\pi}\right) \\
&= \left(0 - \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\right) + \left(\frac{\sin(5n\pi/2)}{n\pi} - 0\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-\sin(n\pi/2) + \sin(5n\pi/2)\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-\sin(n\pi/2) + \left(\sin\left(\underbrace{4n\pi/2}_{a} + \underbrace{n\pi/2}_{b}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-\sin(n\pi/2) + \sin(n\pi/2)\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\cos(b)$$

เราจะได้ว่า (*ข้อมูลนี้จะใช้ในการหา b_n)

$$
\begin{aligned}
\cos(5n\pi/2) &= \cos\left(\underbrace{4n\pi/2}_{a} + \underbrace{n\pi/2}_{b}\right) \\
&= \cos(2n\pi)\cos(n\pi/2) - \sin(2n\pi)\sin(n\pi/2) \\
&= 1\cdot\cos(n\pi/2) - 0\cdot\sin(n\pi/2) \\
&= \cos(n\pi/2)
\end{aligned}
$$

สำหรับ b_n วิธีทำเป็นดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \int_{0.5}^{1} 1\cdot\sin(n\pi t)\,dt + \int_{1}^{2} 0\cdot\sin(n\pi t)\,dt + \int_{2}^{2.5} 1\cdot\sin(n\pi t)\,dt \\
&= \left(-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_{0.5}^{1}\right) + 0 + \left(-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_{2}^{2.5}\right) \\
&= \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi}\right) + \left(-\frac{\cos(5n\pi/2)}{n\pi} + \frac{\cos(2n\pi)}{n\pi}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} \right) + \left(-\frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

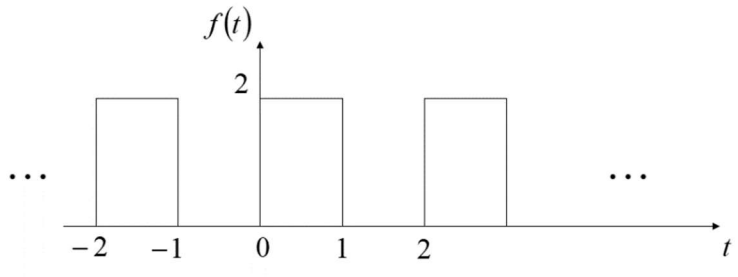
$$= \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}$$

เราจะสังเกตได้ว่า สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ทั้งสามค่าสำหรับตัวอย่างที่ 8.2 นี้ ตรงกับกับสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของสัญญาณในภาพที่ 8.1 ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณในตัวอย่างนี้ จึงเขียนได้เหมือนกันกับสัญญาณในภาพที่ 8.1 ทุกประการ

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi} \right) \sin(n\pi t) \right)$$

ตัวอย่างที่ 8.1-3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบในภาพที่ 8.5



ภาพที่ 8.5 สัญญาณรายคาบสำหรับตัวอย่างที่ 8.1-3

พารามิเตอร์ของสัญญาณในภาพที่ 8.5 นี้ยังคงเหมือนกับสัญญาณในภาพที่ 8.1 ทุกประการ

$T = 2$ s, $\omega_0 = \pi$ rad/s และ $f_0 = 0.5$ Hz

แต่ เมื่อเทียบกับสัญญาณในภาพที่ 8.1 แอมปลิจูดของสัญญาณในตัวอย่างนี้จะมีค่าเป็นสองเท่า ดังนี้

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

เราจะมาดูกันว่า สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของสัญญาณในภาพนี้ แตกต่างจากสัญญาณในภาพที่ 8.1 อย่างไร พิจารณาการหาค่า a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 2\ dt + \int_1^2 0\ dt \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2t\big|_0^1 \right)$$
$$= 1$$

สัมประสิทธิ์ a_n มีวิธีทำ ดังนี้

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$
$$= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n(\pi)t)\,dt$$
$$= \int_0^1 2\cdot\cos(n\pi t)\,dt + \int_1^2 0\cdot\cos(n\pi t)\,dt$$
$$= \frac{2\sin(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_0^1$$
$$= \frac{2\sin(n\pi(1))}{n\pi} - \frac{2\sin(n\pi(0))}{n\pi}$$
$$= \frac{2\sin(n\pi)}{n\pi} - 0$$
$$= 0$$

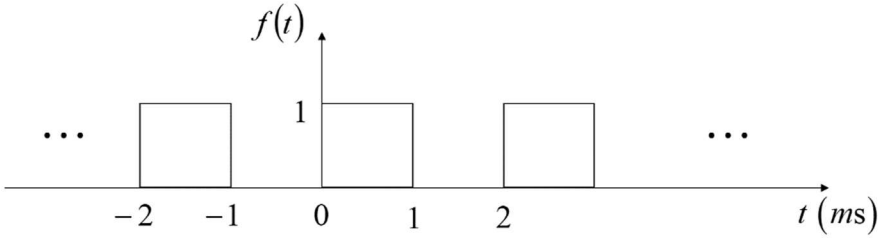
สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ b_n ก็หาได้ดังนี้

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$
$$= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n(\pi)t)\,dt$$
$$= \int_0^1 2\cdot\sin(n\pi t)\,dt + \int_1^2 0\cdot\sin(n\pi t)\,dt$$
$$= -\frac{2\cos(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_0^1$$
$$= \left(-\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}\right) - \left(-\frac{2\cos(0)}{n\pi}\right)$$
$$= \left(-\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}\right) + \frac{2}{n\pi}$$

$$= \left(-\frac{2(-1)^n}{n\pi} \right) + \frac{2}{n\pi}$$
$$= \left(\frac{2(-1)^1(-1)^n}{n\pi} \right) + \frac{2}{n\pi}$$
$$= \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \right) + \frac{2}{n\pi}$$
$$= 2\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi} \right)$$

จากการคำนวณที่กล่าวมา เราก็จะพบว่า สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ทุกค่าของสัญญาณในตัวอย่างนี้ มีค่าเป็นสองเท่าของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ที่ได้จากสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-1

ตัวอย่างที่ 8.1-4 สัญญาณในภาพที่ 8.6 มีลักษณะคล้ายกับสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-1 แต่ สัญญาณในภาพนี้จะมีคาบที่สั้นลง หรืออาจกล่าวได้ว่า สัญญาณในตัวอย่างนี้มีการเปลี่ยนแปลงเร็วกว่าสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบในภาพที่ 8.6



ภาพที่ 8.6 สัญญาณรายคาบสำหรับตัวอย่างที่ 8.1-4

พารามิเตอร์สามค่าของสัญญาณรายคาบข้างต้น เขียนได้เป็นดังนี้

คาบของสัญญาณ $T = 2\times10^{-3}$ s (หรือ 2 มิลลิวินาที)

ความถี่เชิงมุมมูลฐาน $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\times10^{-3}} = \pi\times10^3$ rad/s

ความถี่(เชิงเส้น)มูลฐาน $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\times10^{-3}} = 0.5\times10^3 = 500$ Hz

ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายสัญญาณในภาพที่ 8.6 ก็จะเขียนได้เป็น

$$f(t) = \begin{cases} 1\times10^{-3}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

สัมประสิทธิ์ a_0 ของสัญญาณในภาพที่ 8.6 หาได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\times10^{-3}}\left(\int_0^{2\times10^{-3}} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2\times10^{-3}}\left(\int_0^{1\times10^{-3}} 1\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\times10^{3}\left(t\Big|_0^{1\times10^{-3}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\times10^{3}\left(10^{-3}-0\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

สัมประสิทธิ์ a_n มีวิธีทำดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt \\
&= \frac{2}{2}\int_0^{2\times10^{-3}} f(t)\cos\left(n(\pi)t\right)dt \\
&= \int_0^{1\times10^{-3}} 1\cdot\cos\left(n\pi t\right)dt \\
&= \frac{\sin\left(n\pi t\right)}{n\pi}\Bigg|_0^{\times10^{-3}} \\
&= \frac{\sin\left(n\pi\left(10^{-3}\right)\right)}{n\pi} - \frac{\sin\left(n\pi(0)\right)}{n\pi} \\
&= \frac{\sin\left(10^{-3}n\pi\right)}{n\pi}
\end{aligned}
$$

รายละเอียดการหาสัมประสิทธิ์ b_n เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt \\
&= \frac{2}{2}\int_0^{2\times10^{-3}} f(t)\sin\left(n(\pi)t\right)dt \\
&= \int_0^{1\times10^{-3}} 1\cdot\sin\left(n\pi t\right)dt
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\Bigg|_{0}^{1\times10^{-3}}$$

$$= \left(-\frac{\cos(n\pi 10^{-3})}{n\pi}\right) - \left(-\frac{\cos(0)}{n\pi}\right)$$

$$= \frac{1-\cos(10^{-3}n\pi)}{n\pi}$$

เราจะเห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n แตกต่างจากค่าสำหรับสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-1 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับสัญญาณในตัวอย่างนี้ จึงเขียนได้เป็น

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{\sin(10^{-3}n\pi)}{n\pi}}_{a_n}\cdot\cos\left(n\underbrace{(\pi)}_{\omega_0}t\right) + \underbrace{\left(\frac{1-\cos(10^{-3}n\pi)}{n\pi}\right)}_{b_n}\sin(n(\pi)t)\right)$$

หากสัญญาณรายคาบมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคู่หรือคี่ (สามารถเปิดกลับไปทบทวนในบทที่ 6 หัวข้อที่ 6.5.6) การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์จะทำได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น เนื่องจาก คุณสมบัติดังกล่าวของสัญญาณจะทำให้สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์บางตัวมีค่าเป็นศูนย์

ถ้า

สัญญาณ $f(t)$ มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคี่ $f(-t) = -f(t)$

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ในสมการที่ 8.2 และ 8.3 จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ

$a_0 = 0$ และ $a_n = 0$

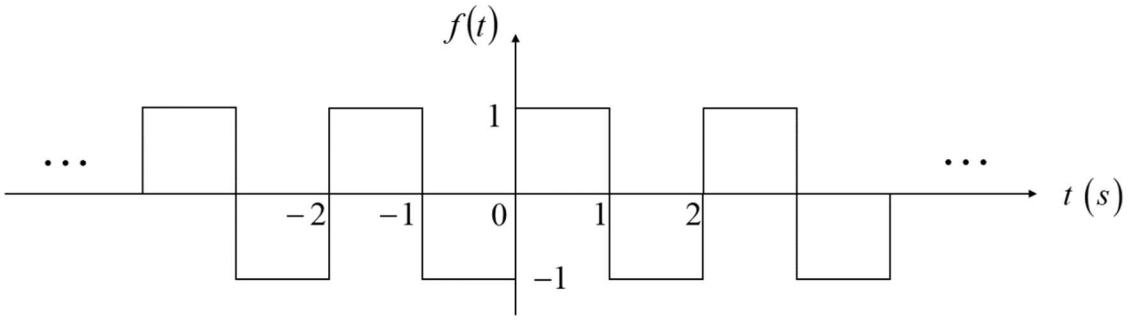
ถ้า

สัญญาณ $f(t)$ มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคู่ $f(t) = f(-t)$

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ในสมการที่ 8.4 จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ

$b_n = 0$

ตัวอย่างที่ 8.1-5 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



ภาพที่ 8.7 สัญญาณรายคาบสำหรับตัวอย่างที่ 8.1-5

จากภาพของสัญญาณ เราจะสังเกตเห็นและคำนวณได้ว่า

$$T = 2\,\text{s},\ \omega_0 = \pi\ \text{rad/s}\ \text{และ}\ f_0 = 0.5\ \text{Hz}$$

สัญญาณ 1 คาบ บนช่วง 0 ถึง 2 วินาที มีสมการเป็นดังนี้

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -1, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

จากภาพ เราก็จะพบว่า สัญญาณรายคาบข้างต้นมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$a_0 = 0\ \text{และ}\ a_n = 0$$

ส่วน b_n ก็จะมีวิธีทำดังนี้

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \\ &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n(\pi)t)\,dt \\ &= \int_0^1 1\cdot\sin(n\pi t)\,dt + \int_1^2 (-1)\cdot\sin(n\pi t)\,dt \\ &= \left(\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_0^1\right) + \left(\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_1^2\right) \\ &= \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) + \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\right) \\ &= \frac{2-2\cos(n\pi)}{n\pi} \\ &= 2\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right) \end{aligned}$$

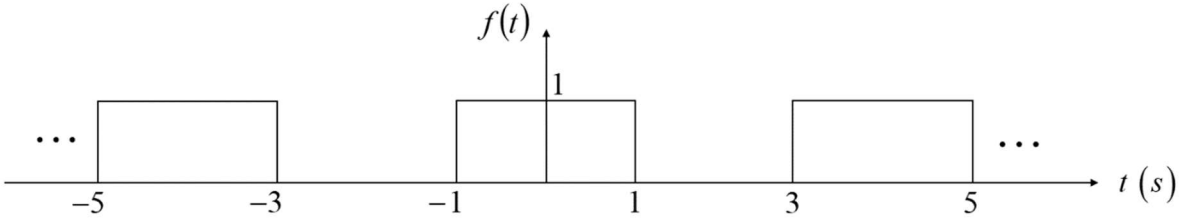
สุดท้าย อนุกรมฟูเรียร์สำหรับสัญญาณในตัวอย่างนี้ จึงเขียนได้เป็น

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$= \underbrace{(0)}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{0}_{a_n} \cdot \cos\left(n\underbrace{(\pi)}_{\omega_0} t \right) + \underbrace{\left(2\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi} \right) \right)}_{b_n} \sin\left(n(\pi)t\right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi} \right) \cdot \sin\left(n(\pi)t\right) \right)$$

ตัวอย่างที่ 8.1-6 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



ภาพที่ 8.8 สัญญาณรายคาบสำหรับตัวอย่างที่ 8.1-6

พารามิเตอร์ของสัญญาณรายคาบข้างต้น เป็นดังนี้

$$T = 4\,\text{s},\ \omega_0 = \pi/2\ \text{rad/s}\ \text{และ}\ f_0 = 0.25\ \text{Hz}$$

สัญญาณ 1 คาบ บนช่วง 0 ถึง 2 วินาที มีสมการเป็นดังนี้

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 3 \end{cases}$$

จากภาพ เราก็จะพบว่า สัญญาณรายคาบข้างต้นมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น

$$b_n = 0$$

เราก็จะทำการหา a_0 และ a_n ก็จะมีวิธีทำดังนี้

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{3} f(t)\ dt \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{3} 0\,dt \right)$$

$$= 0.5$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{4}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(t)\cos\left(n\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(1)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt + \int_{-1}^{3}(0)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}
\end{aligned}
$$

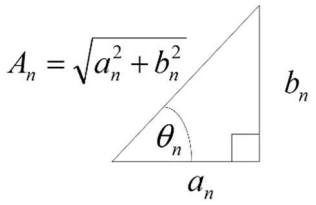
อนุกรมฟูเรียร์สำหรับสัญญาณนี้ จึงเขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right) \\
&= \underbrace{(0.5)}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}}_{a_n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + \underbrace{(0)}_{b_n}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

8.2 สเปคตรัมของสัญญาณรายคาบ (Spectrum of Periodic Signals)

สำหรับการวาดกราฟของสัญญาณ หากเราให้แกนตั้งคือแอมปลิจูดของสัญญาณและให้แกนนอนเป็นเวลา เราก็นิยมเรียกกราฟดังกล่าวว่า ภาพของสัญญาณในโดเมนเวลา หากเราให้เปลี่ยนให้แกนตั้งเป็นองค์ประกอบ (อะไรสักอย่าง) ที่สื่อถึงสัญญาณ และ เปลี่ยนแกนนอนให้เป็นความถี่ เราสามารถจะเรียกกราฟหรือภาพดังกล่าวด้วยชื่อว่า “สเปคตรัม” ได้

เราจะเริ่มต้นเรื่องสเปกตรัม ด้วยการนิยามมุม θ_n และ A_n ซึ่งอยู่ในสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



ภาพที่ 8.9 สามเหลี่ยมมุมฉากสำหรับหัวข้อที่ 8.2

จากภาพเรากำหนดให้สัมประสิทธิ์ a_n และ b_n เป็นด้านประกอบมุมฉาก มุม θ_n ก็คือมุมที่อยู่ติดด้านประกอบมุมฉาก a_n และ A_n ก็คือด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งหาได้จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จากสามเหลี่ยมในภาพข้างต้น เราจะสามารถเขียนอนุกรมฟูเรียร์ที่นิยามไว้ในสมการที่ 8.1 ได้ใหม่ ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin(n\omega_0 t)\right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\cos(\theta_n)\cos(n\omega_0 t) + \sin(\theta_n)\sin(n\omega_0 t)\right] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right] \qquad ;\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\cos(n\omega_0 t + \varphi_n)\right] \qquad ;\varphi_n = -\theta_n
\end{aligned}
$$

จากบรรทัดสุดท้าย เราสามารถกล่าวได้ว่าพารามิเตอร์ A_n และ φ_n ก็คือแอมปลิจูดและเฟสของฟังก์ชันโคไซน์ และจากภาพสามเหลี่ยมข้างต้น เราสามารถเขียน θ_n ให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติได้ดังนี้

$$\tan\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

ดังนั้น เราก็จะสามารถเขียนได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\varphi_n &= -\theta_n \\
&= -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)
\end{aligned}
$$

ถ้า

สัญญาณ $f(t)$ คือสัญญาณรายคาบซึ่งมีสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ a_0, a_n และ b_n

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปแอมปลิจูดและเฟส (amplitude-phase form) เขียนได้ดังนี้

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right)\right] \tag{8.5}$$

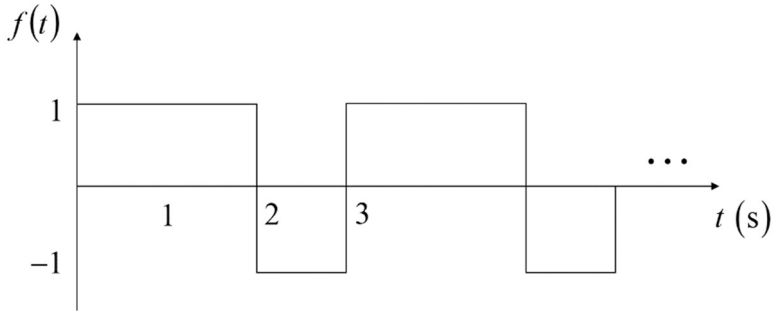
โดยที่

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{คือ “}\textbf{แอมปลิจูด}\text{”} \tag{8.6}$$

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad \text{คือ “}\textbf{เฟส}\text{”} \tag{8.7}$$

ณ จุดนี้ ผู้อ่านอาจพอเดาได้ว่า องค์ประกอบอะไรสักอย่างที่ใช้สื่อถึงสัญญาณรายคาบ (ดังที่เคยแอบถามไปตั้งแต่เกริ่นนำ) ก็คือ แอมปลิจูด A_n และ เฟส φ_n นั่นเอง การนำเอา A_n ไปพล็อต ภาพผลลัพธ์ที่ได้จะถูกเรียกว่า **สเปกตรัมของแอมปลิจูด** (amplitude spectrum) ส่วนการนำเอา φ_n ไปพล็อตนั้น ภาพที่ได้ก็จะถูกเรียกว่า **สเปกตรัมของเฟส** (phase spectrum) ดังนั้น คำว่า “สเปกตรัม” สำหรับสัญญาณรายคาบในตำราเล่มนี้ ก็คือ สเปกตรัมของทั้งแอมปลิจูดและสเปกตรัมเฟส และ มันก็คือภาพของสัญญาณรายคาบในโดเมนความถี่ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 8.2-7 จงวาดภาพร่างของสเปกตรัมสำหรับสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



ภาพที่ 8.10 สัญญาณรายคาบสำหรับตัวอย่างที่ 8.2-7

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของสัญญาณในภาพข้างต้น หาได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^3 f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^2 (1)dt + \int_2^3 (-1)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{3}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)t\right)dt \\
&= \frac{2}{3}\left(\int_0^2 1\cdot\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt + \int_2^3 (-1)\cdot\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt\right) \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{3}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\sin\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)t\right)dt \\
&= \frac{2}{3}\left(\int_0^2 1\cdot\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt + \int_2^3 (-1)\cdot\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt\right) \\
&= \frac{\left(2-2\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right)\right)}{n\pi}
\end{aligned}
$$

หลังจากได้สัมประสิทธิ์ครบทั้ง 3 ค่าแล้ว เราจะยังไม่ขอกล่าวถึง **อนุกรมฟูเรียร์ในรูปดั้งเดิม** (original form) ตามสมการที่ 8.1 ซึ่ง แต่เราจะใช้สมการที่ 8.6 และ 8.7 เพื่อหาแอมปลิจูด A_n และเฟส φ_n ผู้เขียนจะขอยกตัวอย่างการคำนวณพอสังเขป ด้วยการพิจารณากรณีที่ $n=1$ ดังนี้

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

$$
a_1 = \frac{2\sin\left(\frac{4(1)\pi}{3}\right)}{(1)\pi} = \frac{2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\pi} = \frac{2\sin\left(240^\circ\right)}{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{\pi}
$$

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

$$b_1 = \frac{\left(2 - 2\cos\left(\frac{4(1)\pi}{3}\right)\right)}{(1)\pi} = \frac{\left(2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

แอมปลิจูด

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}$$

$$\approx 1.10$$

เฟส

$$\varphi_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{3}{\pi}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)}\right) = -\tan^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

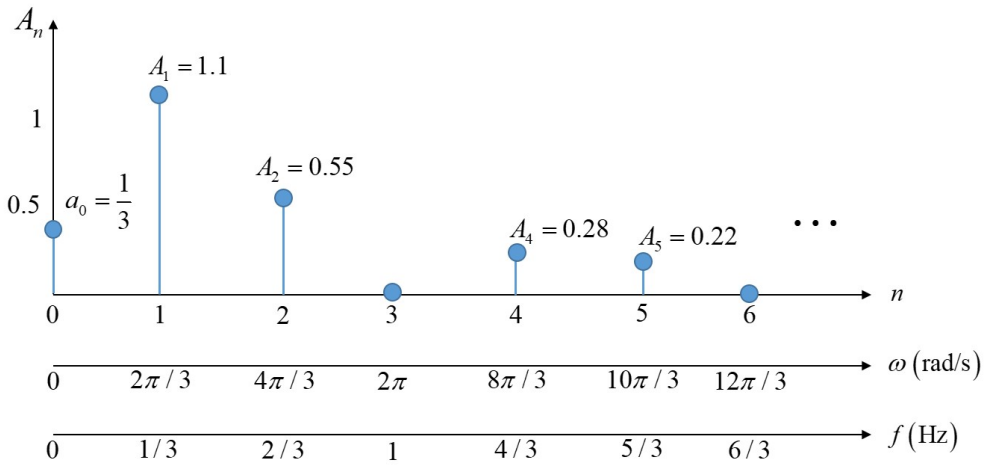
$$= 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

แอมปลิจูดและเฟสสำหรับสัญญาณในตัวอย่างนี้ (คำนวณให้ดูเพียงบางค่าเท่านั้น) แสดงอยู่ในตารางที่ 8.2

ตารางที่ 8.2 แอมปลิจูดและเฟสสำหรับตัวอย่างที่ 8.2-7

n	ω	f	a_n	b_n	A_n	φ_n
1	$\frac{2\pi}{3} = \omega_0$	$\frac{1}{3}$	≈ -0.55	≈ 0.95	≈ 1.10	$\pi/3$
2	$(2)\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$	$(2)\frac{1}{3}$	≈ 0.47	≈ 0.48	≈ 0.55	$-\pi/3$
3	$(3)\frac{2\pi}{3} = 2\pi$	$(3)\frac{1}{3}$	0	0	0	ไม่นิยาม
4	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{4}{3}$	≈ -0.14	≈ 0.24	≈ 0.28	$\pi/3$
5	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{5}{3}$	≈ 0.11	≈ 0.19	≈ 0.22	$-\pi/3$
6	4π	2	0	0	0	ไม่นิยาม
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20			≈ 0.03	≈ 0.05		$-\pi/3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ภาพร่างสเปกตรัมของแอมปลิจูดซึ่งได้มาจากการพล็อตค่า A_n แสดงได้ด้วยภาพที่ 8.11 ผู้เขียนตั้งใจใส่แกนนอนลงไป 3 แกนเพื่อแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของทั้งสามตัวแปรดังกล่าว

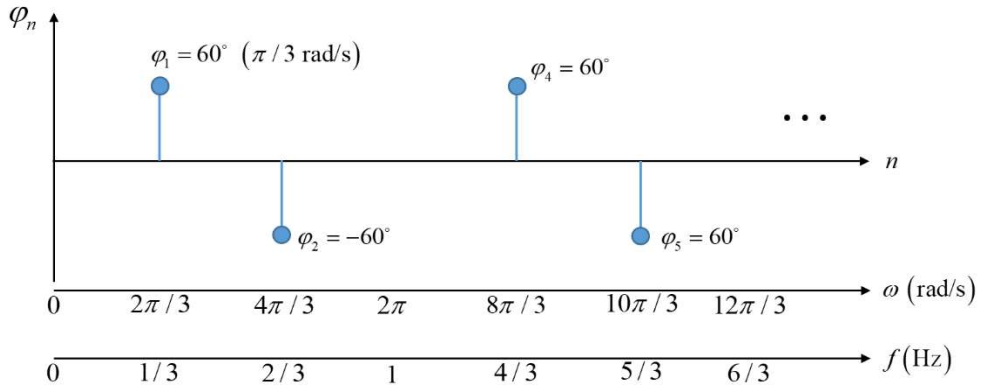


ภาพที่ 8.11 สเปกตรัมของแอมปลิจูดสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.2-7

จากภาพข้างต้น หากพิจารณา $n=3$ เราจะกล่าวได้ว่า ณ ความถี่ 1 Hz สัญญาณมีแอมปลิจูดเป็นศูนย์ ส่วนที่ $n=4$ เราก็สามารถกล่าวได้ว่า องค์ประกอบทางความถี่ที่ 4/3 Hz ของสัญญาณมีค่าไม่เป็นศูนย์ ลักษณะทั่วไปที่สังเกตเห็นได้จาก สเปกตรัมของแอมปลิจูดสำหรับสัญญาณรายคาบ สามารถสรุปได้ 2 ข้อดังนี้

1. สเปกตรัมเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง
2. เมื่อความถี่สูงขึ้น แอมปลิจูดจะมีค่าลดลง

ในทำนองเดียวกัน ภาพร่างสเปกตรัมของเฟสก็สามารถวาดขึ้นมาได้โดยการพล็อตค่า φ_n ภาพที่ 8.12 แสดงให้เห็นถึงสเปกตรัมดังกล่าว ซึ่งก็มีความไม่ต่อเนื่องเฉกเช่นสเปกตรัมของแอมปลิจูด



ภาพที่ 8.12 สเปกตรัมของเฟสสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.2-7

ผู้อ่านจะเห็นได้ว่าสัญญาณรายคาบซึ่งมีรูปร่างในโดเมนเวลาดังปรากฏในภาพที่ 8.10 จะมีองค์ประกอบทางความถี่อยู่ที่เพียงบางความถี่เท่านั้น เมื่อพิจารณาถึงความถี่และมองสัญญาณในเชิงวิศวกรรมไฟฟ้า เราสามารถที่จะพิจารณาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปดั้งเดิม ได้เป็น

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{dc}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)}_{\text{dc}}$$

จากสมการข้างต้น คำอธิบายสำคัญสรุปได้ดังนี้

- สัมประสิทธิ์ a_0 คือองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณ ที่ความถี่ 0 Hz (ดังปรากฏในภาพที่ 8.11) เป็นที่ทราบกันดีว่า ไฟฟ้ากระแสตรง (dc) มีความถี่เป็น 0 Hz หรือจะพูดว่าไม่มีความถี่ก็ได้ เราจึงเรียกองค์ประกอบ a_0 นี้ว่าเป็น องค์ประกอบไฟฟ้ากระแสตรง (dc component) ของสัญญาณ $f(t)$
- ตัวแปร ω_0 จะถูกเรียกว่า ความถี่มูลฐาน (fundamental frequency) ส่วนตัวแปร $n\omega_0$ ก็จะถูกเรียกว่า ความถี่ฮาร์โมนิค (harmonic frequency) โดยความถี่นี้มีค่าเป็นจำนวนเท่าของความถี่มูลฐาน เราอาจจะเห็นได้จากตารางที่ 8.2 รวมถึงภาพที่ 8.11 และ 8.12 ว่า องค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณ (ทั้งเฟสและแอมปลิจูด) จะมีค่าอยู่ที่ความถี่มูลฐานและความถี่ฮาร์โมนิคเท่านั้น
- สัญญาณ $a_n \cos(n\omega_0 t)$ และ $b_n \sin(n\omega_0 t)$ จะถูกเรียกว่าฮาร์โมนิคที่ n ของสัญญาณ $f(t)$ ยังเป็นที่ทราบกันดีว่า ไฟฟ้ากระแสสลับ (ac) นั้นจะสลับขึ้นลงด้วยอัตราที่อธิบายได้โดยความถี่ ดังนั้นสัญญาณฮาร์โมนิคทั้งหมด (ซึ่งมีจำนวนพจน์อนันต์และแต่ละพจน์ก็จะมีความถี่เท่ากับ $n\omega_0$) ก็จะถูกเรียกว่าเป็น องค์ประกอบไฟฟ้ากระแสสลับ (ac component) ของสัญญาณ $f(t)$

สำหรับตัวอย่างนี้อนุกรมฟูเรียร์ดั้งเดิม สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{2\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi}}_{a_n} \cdot \cos\left(n\underbrace{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\omega_0} t\right) + \underbrace{\frac{2-2\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi}}_{b_n} \sin\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)t\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{dc}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi} \cdot \cos\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)t\right) + \frac{2-2\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}{n\pi} \sin\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)t\right)\right)}_{\text{ac}} \end{aligned}$$

อนึ่ง เรายังนิยมเรียกหรืออ้างถึงอนุกรมฟูเรียร์ในชื่อ การกระจายของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series expansion) เพราะ สัญญาณ $f(t)$ จะถูกกระจายจนมีพจน์เป็นอนันต์ ก่อนจบตัวอย่างนี้ ผู้เขียนขอสรุปว่าสัญญาณรายคายสามารถแสดงได้ด้วยภาพในสองโดเมน (มิติ) ซึ่งก็คือโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ สำหรับตัวอย่างนี้ ภาพที่ 8.10 คือภาพของสัญญาณรายคาบในโดเมนเวลา ส่วนภาพสเปกตรัมทั้งแอมปลิจูดและเฟสดังแสดงในภาพที่ 8.11 และ 8.12 ตามลำดับ ก็คือ ภาพที่แสดงถึงสัญญาณดังกล่าวในโดเมนความถี่

ตัวอย่างที่ 8.2-8 จงหาสเปกตรัมสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.1-1

พารามิเตอร์สำคัญของสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-1 คือ

$$T = 2\,\text{s},\ \omega_0 = \pi\ \text{rad/s}\ \text{และ}\ f_0 = 0.5\ \text{Hz}$$

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ทั้งสามค่าของสัญญาณในตัวอย่างดังกล่าว ก็คือ

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_n = 0\ \text{และ}\ b_n = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

ค่าเฟส $\varphi_n = -\tan^{-1}\left(b_n / a_n\right)$ ดูเหมือนจะไม่มีนิยามและหาจากเครื่องคิดเลขไม่ได้ เพราะอาร์กิวเมนต์ด้านในฟังก์ชันแทนเจนต์ผกผัน ซึ่งก็คือ a_n นั้นมีค่าเป็นศูนย์ ผู้เขียนจึงขอยกตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางในการคำนวณหาค่าเฟสสำหรับกรณีนี้ แบบพอสังเขป

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = -\frac{1}{(1)\pi}\left(\cos\left((1)\pi\right) - 1\right) = \frac{2}{\pi}$$

จากข้อเท็จจริงที่ว่า $\tan 90^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{0}$ ซึ่งก็มีความหมายเท่ากับ $90^\circ = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{0}\right)$

ข้อเท็จจริงข้างต้น ก็ทำให้เราพอจะคิดต่อยอดได้ว่า

$$\varphi_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2/\pi}{0}\right) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}\ \text{rad/s}$$

ในส่วนของแอมปลิจูด เราก็จะเขียนได้ว่า

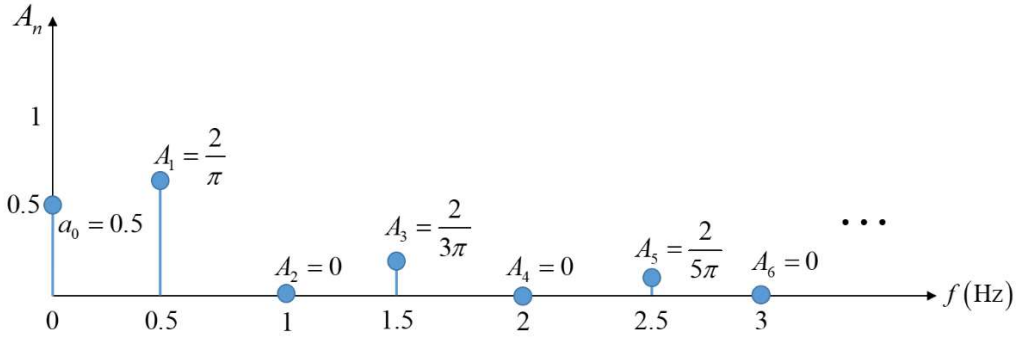
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0^2 + b_n^2} = b_n\ \text{(พิจารณาเฉพาะคำตอบของการถอดรากที่เป็นบวก)}$$

ในลักษณะเดียวกันกับตัวอย่างที่ 8.2-1 เราก็จะคำนวณหา A_n และ φ_n ที่บางความถี่ให้เพียงพอสำหรับการนำไปวาดภาพร่างสเปกตรัม ค่าเฟสและแอมปลิจูดสำหรับตัวอย่างนี้แสดงไว้ในตารางทางด้านล่าง

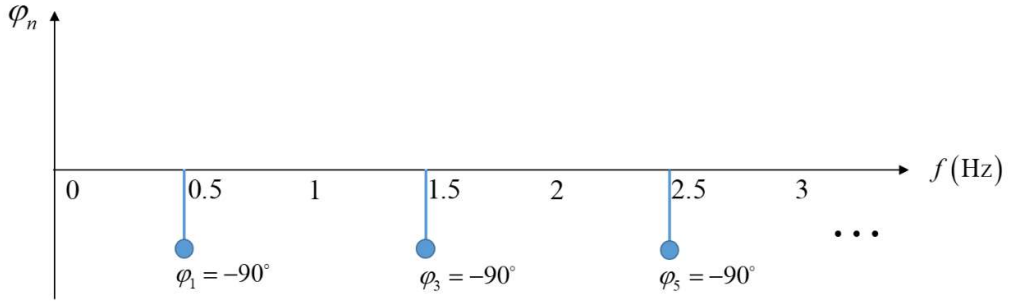
ตารางที่ 8.3 แอมปลิจูดและเฟสสำหรับตัวอย่างที่ 8.2-8

n	ω	f	a_n	b_n	A_n	φ_n
1	$\pi = \omega_0$	0.5	0	$2/\pi$	$2/\pi$	-90°
2	2π	1	0	0	0	ไม่นิยาม
3	3π	1.5	0	$2/3\pi$	$2/3\pi$	-90°
4	4π	2	0	0	0	ไม่นิยาม
5	5π	2.5	0	$2/5\pi$	$2/5\pi$	-90°
6	6π	3	0	0	0	ไม่นิยาม

จากตารางข้างต้น ภาพร่างของสเปกตรัมของทั้งแอมปลิจูดและเฟส ก็สามารถแสดงได้ด้วยภาพที่ 8.13 และ 8.14 ตามลำดับ



ภาพที่ 8.13 สเปกตรัมของแอมปลิจูดสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.2-8



ภาพที่ 8.14 สเปกตรัมของเฟสสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.2-8

8.3 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อน (Fourier Series in Complex Exponential Form)

จากสมการที่ 8.1 เราจะเห็นได้ชัดเจนว่า อนุกรมฟูเรียร์ดั้งเดิมจะมีพจน์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ปรากฏอยู่ หากเราแทนที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านั้นด้วยฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน โดยการใช้เอกลักษณ์ของออยเลอร์ เราจะได้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปแบบที่กระชับขึ้น หรือที่ฝรั่งเรียกกันว่า compact form เริ่มต้นจากอนุกรมฟูเรียร์ดั้งเดิม

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right) \quad ; \; n\omega_0 = \omega_n$$

เราจะใช้เอกลักษณ์ออยเลอร์ในการเปลี่ยนฟังก์ชันตรีโกณมิติให้กลายเป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อน และทำการจัดรูปสมการ ดังนี้

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}}{2j} \right) \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(\frac{e^{j\omega_n t}+e^{-j\omega_n t}}{2}\right) - jb_n\left(\frac{e^{j\omega_n t}-e^{-j\omega_n t}}{2}\right)\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n e^{j\omega_n t}}{2} + \frac{a_n e^{-j\omega_n t}}{2} - \frac{jb_n e^{j\omega_n t}}{2} + \frac{jb_n e^{-j\omega_n t}}{2}\right)$$

$$= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{j\omega_n t} - jb_n e^{j\omega_n t} + a_n e^{-j\omega_n t} + jb_n e^{-j\omega_n t}\right)$$

$$= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(a_n - jb_n\right)e^{j\omega_n t} + \left(a_n + jb_n\right)e^{-j\omega_n t}\right)$$

$$f\left(t\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}e^{j\omega_n t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-j\omega_n t}\right) \qquad (8.8)$$

หลังจากนั้น เราก็จะกำหนดตัวแปรใหม่ขึ้นมา 3 ตัว ดังนี้

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$c_{-n} = \left(c_n\right)^* = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$$c_0 = a_0$$

จากตัวแปรสามตัวข้างต้น สมการที่ 8.8 ก็จะเขียนได้เป็น

$$f\left(t\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n}e^{-j\omega_n t}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

สมการในบรรทัดล่างสุดจะถูกเรียกว่าเป็น **อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน** ซึ่งหากเปรียบเทียบกับ อนุกรมฟูเรียร์ในรูปดั้งเดิม เราก็จะเห็นได้ว่าอนุกรมนี้มีความกระชับขึ้น สำหรับตัวแปร c_n ซึ่งนิยมเรียกว่า **สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อน** ก็หาได้จากสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n แต่มันก็คงไม่ compact สักเท่าไหร่ ถ้าเราจะไปคำนวณไปตรงๆ แบบนั้น ณ จุดนี้ เราก็จะมาลองจัดรูปเพื่อหาสมการสำหรับ c_n ซึ่งมีรายละเอียดเป็นดังนี้

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$= \left(\frac{2}{T}\int_T f\left(t\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt - j\frac{2}{T}\int_T f\left(t\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt \right)/2$$

$$= \frac{1}{T}\int_T f\left(t\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt - j\frac{1}{T}\int_T f\left(t\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T \left(\cos\left(n\omega_0 t\right) - j\sin\left(n\omega_0 t\right)\right) f\left(t\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T e^{-jn\omega_0 t} f\left(t\right)dt$$

ถ้า

สัญญาณ $f(t)$ คือสัญญาณรายคาบ

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน (complex exponential form) ของ $f(t)$ คือ

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{8.9}$$

โดยที่ **สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อน** หาได้จาก

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{8.10}$$

ประเด็นสำคัญที่ผู้เขียนอยากพูดถึงเกี่ยวกับอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อน มีดังต่อไปนี้

- สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ในรูปดั้งเดิม $n=1,2,\ldots$ แต่ สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียล $n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ สิ่งนี้หมายความว่า อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลจะมีองค์ประกอบฮาร์โมนิค หรือ องค์ประกอบไฟฟ้ากระแสสลับ ทั้งที่ความถี่บวกและความถี่ลบ

- สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อน c_n เป็นจำนวนเชิงซ้อน

  แมกนิจูดของ c_n จึงถูกอธิบายได้โดย $|c_n|=\sqrt{\mathrm{Re}(c_n)^2+\mathrm{Im}(c_n)^2}$

  และ เฟสของ c_n ก็จะถูกนิยามโดย $\theta_n=\tan^{-1}\left(\mathrm{Im}(c_n)/\mathrm{Re}(c_n)\right)$

- การพล็อต $|c_n|$ เทียบกับความถี่ จะถูกเรียกว่า
  สเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อน (complex amplitude spectrum)

- การพล็อต θ_n เทียบกับความถี่ จะถูกเรียกว่า
  สเปกตรัมของเฟสเชิงซ้อน (complex phase spectrum)

- หากเราพิจารณาสเปกตรัมทั้งสองข้างต้นรวมกัน เราสามารถอ้างถึงทั้งสองภาพดังกล่าวได้ในชื่อ
  สเปกตรัมความถี่เชิงซ้อน (complex frequency spectrum)

- การพล็อต $|c_n|^2$ เทียบกับความถี่ จะถูกเรียกว่า
  สเปกตรัมของกำลัง (power spectrum)

ตัวอย่างที่ 8.3-9 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อนของสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-1

สำหรับตัวอย่างดังกล่าว ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายสัญญาณก็คือ

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 0, & 1<t\le 2\end{cases}$$

พารามิเตอร์ที่สำคัญถูกยกมาเขียนอีกครั้งเพื่อความสะดวกในการคำนวณ

$$T=2\,\text{s},\ \omega_0=\pi\ \text{rad/s}\ \text{และ}\ f_0=0.5\ \text{Hz}$$

การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนสำหรับสัญญาณข้างต้น มีวิธีทำดังนี้

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1)e^{-jn\omega_0 t}dt+\int_1^2 (0)e^{-jn\omega_0 t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\bigg|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-jn\omega_0}}{jn\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-jn\pi}}{jn\pi}\right) \quad ;\ \ \omega_0=\pi \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos n\pi}{jn\pi}\right) \\
&= \frac{1-(-1)^n}{j2n\pi}
\end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ข้างต้นไม่นิยามที่ $n=0$ ดังนั้น เราจะหาจากความสัมพันธ์ $c_0=a_0=\frac{1}{2}$

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อนของสัญญาณในตัวอย่างนี้ ก็คือ

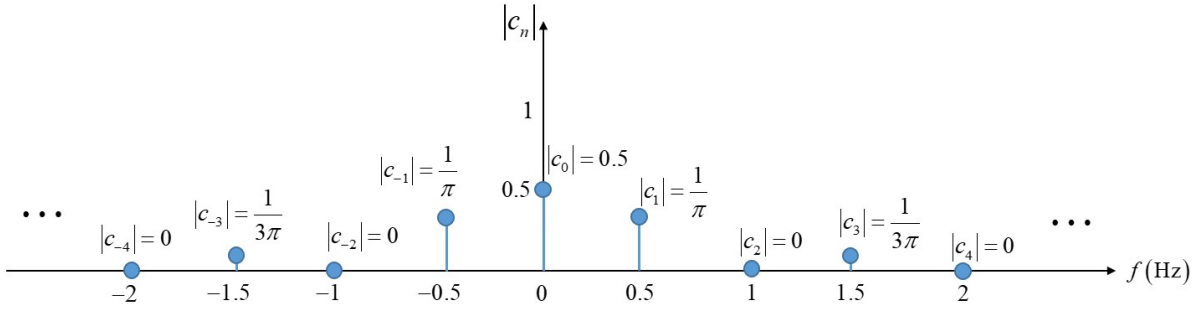
$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1-(-1)^n}{j2n\pi}\cdot e^{jn\pi t}+c_0 e^{j(0)\omega\pi t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{j2n\pi}\cdot e^{jn\pi t} \\
&= 0.5+\sum_{n=-\alpha,n\neq 0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{j2n\pi}\cdot e^{jn\pi t}
\end{aligned}$$

แมกนิจูดและเฟสเชิงซ้อนของ c_n ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 8.4

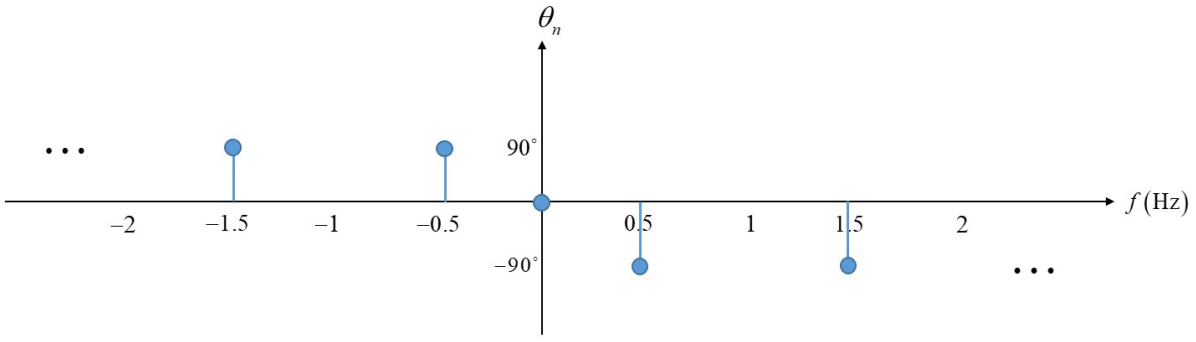
ตารางที่ 8.4 แอมปลิจูดและเฟสเชิงซ้อนของ c_n สำหรับตัวอย่างที่ 8.3-9

n	f	$\lvert c_n \rvert$	θ_n
⋮	⋮	⋮	⋮
–4	–2	0	ไม่นิยาม
–3	–1.5	$1/3\pi$	90°
–2	–1	0	ไม่นิยาม
–1	–0.5	$1/\pi$	90°
0	0	0.5	0°
1	0.5	$1/\pi$	-90°
2	1	0	ไม่นิยาม
3	1.5	$1/3\pi$	-90°
4	2	0	ไม่นิยาม
⋮	⋮	⋮	⋮

สเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อนและเฟสเชิงซ้อน แสดงด้วยภาพที่ 8.15 และ 8.16 ตามลำดับ



ภาพที่ 8.15 สเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อนสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.3-9



ภาพที่ 8.16 สเปกตรัมของเฟสเชิงซ้อนสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.3-9

ตัวอย่างที่ 8.3-10 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อนสำหรับสัญญาณในตัวอย่างที่ 8.1-6

สำหรับตัวอย่างที่ 8.1-6 สัญญาณบนหนึ่งช่วงคาบ และ พารามิเตอร์สำคัญเป็นดังนี้

$$f(t)=\begin{cases}1, & -1\le t\le 1\\ 0, & 1<t\le 3\end{cases}$$

$T=4$ s, $\omega_0=\pi/2$ rad/s และ $f_0=0.25$ Hz

สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนหาได้จากสมการที่ 8.10 ดังนี้

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1}(1)e^{-jn\omega_0 t}dt+\int_{1}^{3}(0)e^{-jn\omega_0 t}dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{-1}^{1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-jn\omega_0}}{-jn\omega_0}-\frac{e^{jn\omega_0}}{-jn\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{jn\omega_0}-e^{-jn\omega_0}}{jn\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{4n\omega_0}\left(\left(\frac{2}{2}\right)\frac{e^{jn\omega_0}-e^{-jn\omega_0}}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2n\omega_0}\left(\frac{e^{jn\omega_0}-e^{-jn\omega_0}}{2j}\right) \quad ; \quad \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} \\
&= \frac{1}{2n\omega_0}\left(\sin\left(n\omega_0\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(n\omega_0\right)}{n\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

$$c_n=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(n\omega_0\right) \qquad ;\ \operatorname{sinc}\left(x\right)=\sin x/x$$

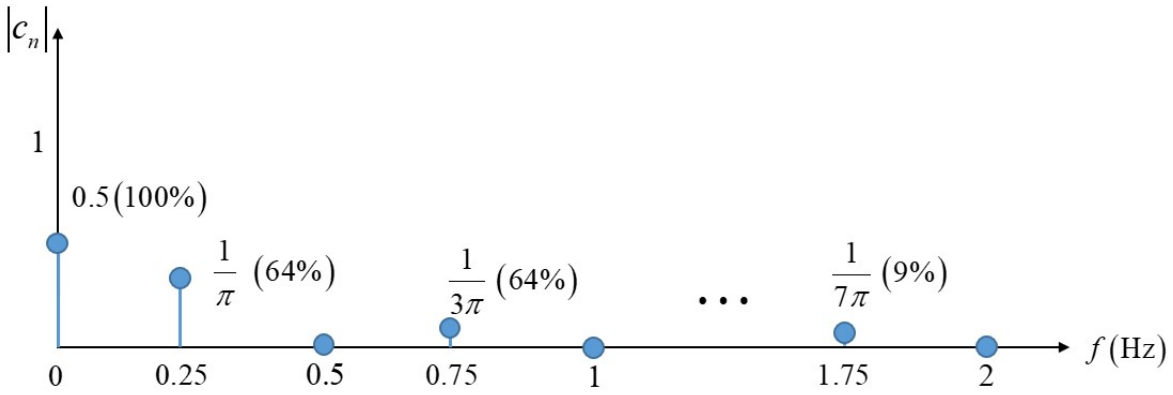
อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อนของสัญญาณ ก็คือ

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(n\omega_0\right)\cdot e^{\frac{jn\pi t}{2}}
\end{aligned}$$

สำหรับตัวอย่างนี้เราจะสนใจเพียงแค่แมกนิจูดและสเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อนเฉพาะในฝั่งความถี่บวกเท่านั้น แมกนิจูดของ c_n ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 8.5 ส่วนสเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อนก็แสดงด้วยภาพที่ 8.17

ตารางที่ 8.5 แมกนิจูดของ c_n สำหรับตัวอย่างที่ 8.3-10

n	f	$\lvert c_n \rvert$
0	0	$0.5\ ;\ \sin(0)/0 = 1$
1	0.25	$1/\pi$
2	0.5	0
3	0.75	$1/3\pi$
4	1	0
⋮	⋮	⋮



ภาพที่ 8.17 สเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อนสำหรับสัญญาณรายคาบในตัวอย่างที่ 8.3-10

สำหรับตัวอย่างนี้เราจะขอกล่าวเบื้องต้นเกี่ยวกับคำว่าแบนด์วิธ (bandwidth) ของสัญญาณ จากภาพข้างต้น หากกำหนดให้องค์ประกอบไฟฟ้ากระแสตรงมีค่าเท่ากับ100% เราก็จะคำนวณหา % ขององค์ประกอบไฟฟ้ากระแสสลับ (ฮาร์โมนิค) ที่ความถี่ต่างๆ ได้ดังแสดงไว้ในวงเล็บ หากพิจารณาองค์ประกอบไฟฟ้ากระแสสลับที่มีค่าเท่ากับ 9% เราจะกล่าวได้ว่าองค์ประกอบนี้ได้มีค่าลดลงไปมากกว่า90% และ เราจะเรียกแถบกว้างความถี่จาก 0 Hz จนถึงความถี่ที่จุดนี้ว่า แบนด์วิธของสัญญาณที่ใช้ระดับนัยยะสำคัญ 90% (90% essential bandwidth) ที่ระดับที่กล่าวถึงนี้ องค์ประกอบทางความถี่ทั้งหมด 90% ของสัญญาณจะมีค่าอยู่ไม่เกินความถี่ 1.75 Hz อนึ่งสำหรับสัญญาณรายคาบใดๆ เราสามารถเปลี่ยนระดับนัยยะสำคัญของการพิจารณาแบนด์วิธเป็นค่าอื่นๆ เช่น 95% หรือ 99% ได้

แบบทดสอบความเข้าใจ

ข้อความต่อไปนี้กล่าวถูกต้องหรือไม่ ?

1 อนุกรมฟูเรียร์เป็นเครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์สัญญาณทางวิศวกรรมได้ทุกประเภท

2 อนุกรมฟูเรียร์เป็นอนุกรมอนันต์

3 สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์มีเพียง 1 ค่า

4 สัญญาณใดๆ ที่มีลักษณะเป็นรายคาบนั้น สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ได้

5 เราจะใช้ช่วงเวลาในการพิจารณาสัญญาณ 1 คาบเป็นช่วงเวลาใดก็ได้ อนุกรมฟูเรียร์ก็จะมีค่าเท่ากัน

6 สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์บางค่าของฟังก์ชันคู่มีค่าเป็น 0

7 สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ทุกค่าของฟังก์ชันคี่มีค่าเป็น 0

8 สเปกตรัมของแอมปลิจูดคือภาพของสัญญาณในโดเมนความถี่

9 สเปกตรัมของเฟสคือภาพของสัญญาณในโดเมนความถี่

10 การพล็อตแมกนิจูดของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนเทียบกับความถี่ถูกเรียกว่าสเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อน

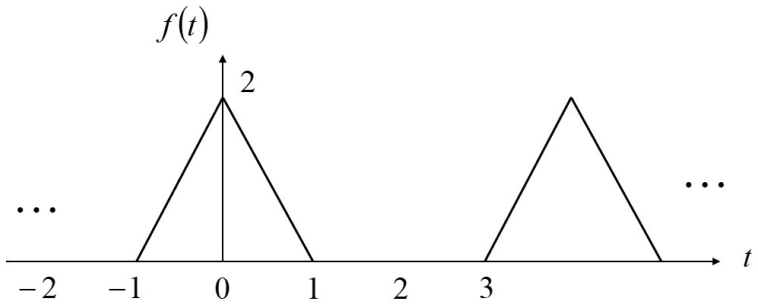
ข้อแนะนำ

หากท่านตอบว่า **ถูก** ควรตอบพร้อมเหตุผล แต่ หากท่านตอบว่า **ไม่ใช่** ควรต้องมีข้อขัดแย้ง

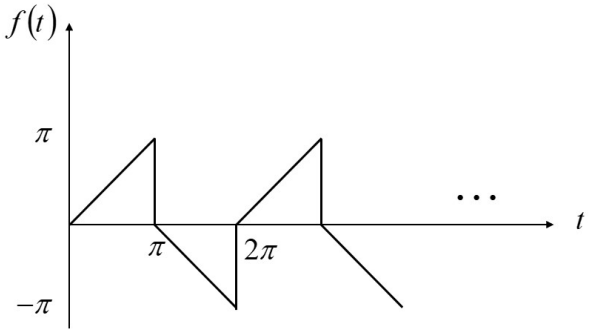
แบบฝึกทักษะ

8.1 นิยามของอนุกรมฟูเรียร์

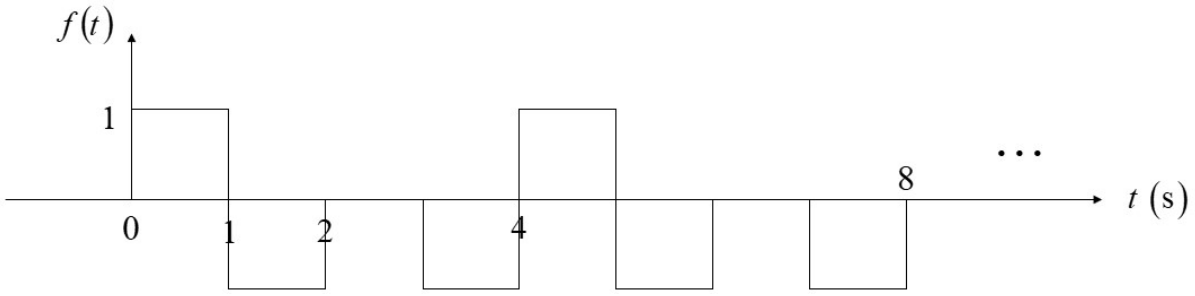
1. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



2. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



3. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบต่อไปนี้



8.2 สเปคตรัมของสัญญาณรายคาบ

4. กำหนดให้สัญญาณรายคาบมีคาบเท่ากับ 2π และมีสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เป็นดังนี้

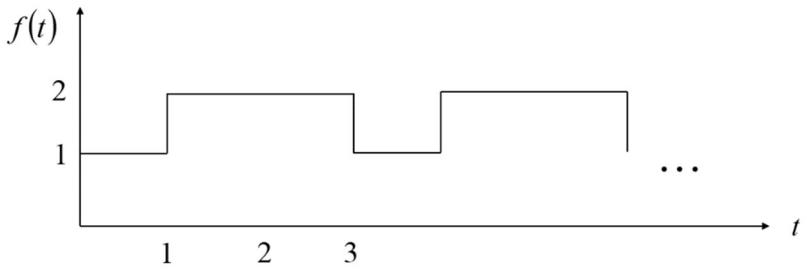
$$a_0 = -\sin(\pi/6)$$

$$a_n = \frac{\sin(nt)}{n\pi}$$

$$b_n = \begin{cases} 6/n\pi & n = 1,3,5,\ldots \\ 0 & n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

จงวาด amplitude spectrum และ phase spectrum ของสัญญาณดังกล่าว

5. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณต่อไปนี้ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน พร้อมทั้งวาดภาพร่างสเปกตรัมความถี่เชิงซ้อน



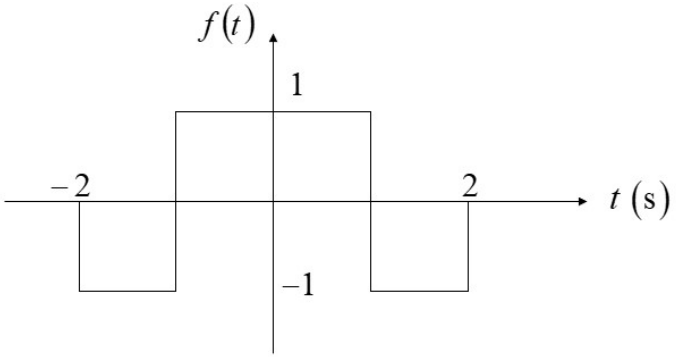
6. สัญญาณรายคาบที่มีคาบมูลฐานเท่ากับ 10 วินาที มีสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนเป็นดังนี้

$$c_n = 2\text{sinc}\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

จงวาดภาพสเปกตรัมของแอมปลิจูดเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสัญญาณดังกล่าว

8.3 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อน

7. รูปทางด้านล่างแสดงสัญญาณรายคาบที่ยกมาพิจารณาเพียงคาบเดียว จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณดังกล่าวในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน



8. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณต่อไปนี้ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน และ จงหาแบนด์วิธของสัญญาณที่ระดับนัยยะสำคัญ 95%