บั้นที่ 7

การแปลงลาปลาซ

“ ถามไก่ทั่วโลกหล้า
อันว่า ลาปลาซ เป็นฉันใด
จึงเรียนกันเอาเป็นเอาตาย
ด้วยชีวิต ”

ลิ้มกโช้ว ไม่ได้กล่าวไว้
มังกรหยก ภาค วิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

เนื้อหา การแปลงลาปลาซ ในไฟล์นี้

เป็นส่วนหนึ่งของหนังสือ พีชคณิตเชิงเส้นและการแปลงสัญญาณ สำหรับวิศวกรรมไฟฟ้า

ผู้แต่ง: ภูริพงศ์ สุทธิโสภาพันธ์

ผู้อ่านสามารถร่วมแสดงความคิดเห็น/ข้อแนะนำเกี่ยวกับเนื้อหาส่วนนี้ที่

purisu@kku.ac.th

ขอบคุณครับ

CHAPTER7

การแปลงลาปลาซ
Laplace Transform

“เทมิดเทอมแบบไม่รู้ตัว และ
ต้องมาทุ่มไฟนอลแบบไม่ได้ตั้งใจ”

- ภูษณ EE-KKU 52 (aka DOMMINIONO), สามไม้

I never make the same mistake twice!

ตั้งแต่บทนี้เป็นต้นไป ผู้เขียนจะสาธยายถึง วิธีการแปลงสัญญาณ (signal transform) ที่สำคัญๆ ในแวดวงวิศวกรรมไฟฟ้า สำหรับบทนี้ เราจะมาว่ากันด้วยเรื่องการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) การแปลงดังกล่าวถูกคิดค้นด้วยนักคณิตศาสตร์ซึ่งมีนามว่า “**Pierre Simon de Laplace**” บุรุษชาวฝรั่งเศสผู้นี้มีความสัมพันธ์กับอัจฉริยภาพชื่อดังของโลกหลายๆท่าน ผู้เขียนใคร่ขอเล่าให้ท่านฟังเพื่อเสริมอรรถรสการอ่าน นักคณิตศาสตร์นามว่า **Poisson** (พัวซองส์) เคยยกย่อง **Laplace** ในฐานะลูกศิษย์ว่าเป็น “เซอร์ **Isaac Newton** แห่งฝรั่งเศส” เปรียบเทียบกันขนาดนี้ ท่านผู้อ่านคิดดูก็แล้วกันว่า ท่านลาปลาซจะเก่งกาจฉลาดถึงเพียงใด ในยุคที่ยังไม่มี impact factor และ quartile มาเป็นตัวกำหนดเงินรางวัล เอ้ย ! คุณภาพของการเผยแพร่ผลงานวิจัย **Laplace** ได้เคยตีพิมพ์ผลงานวิจัยในวารสารที่มีมหาเทพด้านคณิตศาสตร์ **Joseph Louis Lagrange** นั่งเป็นบรรณาธิการอยู่ ยิ่งไปกว่านั้นท่านยังเคยได้รับการแต่งตั้งจาก “**Napoleon Bonaparte**” จอมจักรพรรดิผู้เชี่ยวชาญการศึก ให้เป็นรัฐมนตรีอีกด้วย ผู้เขียนหวังว่า เกร็ดเล็กเกร็ดน้อยที่น่าสนใจเหล่านี้จะช่วยให้ผู้อ่านมีความใคร่ที่จะศึกษาเนื้อหา (ที่อาจเข้าใจได้ไม่ยาก แต่ก็ไม่ง่าย) ซึ่งท่านได้คิดค้นเอาไว้มากขึ้น

7.1 นิยามของการแปลงลาปลาซ (Definition of Laplace Transform)

การแปลงลาปลาซ คือ **การแปลงเชิงปริพันธ์** (integral transform) ประเภทหนึ่ง การแปลงนี้จะเปลี่ยนสัญญาณที่อยู่ในโดเมน**เวลา** “ t ” ให้กลายเป็น สัญญาณในโดเมน**ความถี่เชิงซ้อน** “ s ” นิยามของการแปลงลาปลาซเป็นดังต่อไปนี้

ถ้า

หากเราต้องการหา “**ผลการแปลงลาปลาซ**” เราสามารถทำได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(7.1)

เมื่อ

$F(s)$ คือผลการแปลงลาปลาซ ซึ่งเป็นสัญญาณในโดเมนความถี่เชิงซ้อน

$s=\sigma+j\omega$ คือ ตัวแปรลาปลาซ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมการที่ 7.1 จะถูกอ้างถึงในชื่อนิยามของการแปลงลาปลาซ และเป็นนิยามของการแปลงลาปลาซแบบข้างเดียว (unilateral Laplace transform) โดยตำราเล่มนี้จะสนใจเฉพาะการแปลงลาปลาซแบบนี้เท่านั้น กำหนดให้สัญลักษณ์ด้านล่างต่อไปนี้ แทนคำว่า “จงนำสัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ ไปหาผลการแปลงลาปลาซ”

$$L\left[f(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\therefore L\left[f(t)\right]=F(s)$$

หมายเหตุ* สัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ ที่จะกล่าวถึงในบทนี้ นิยามบนช่วงเวลา $t\geq 0$ เท่านั้น ซึ่งก็หมายความว่า $f(t)=0,\ t<0$ ด้วยนิยามนี้ ไม่ว่าเราจะพิจารณาสัญญาณ $f(t)$ ใดๆ สัญญาณนั้นก็เหมือนกับว่าถูกคูณด้วย $u(t)$ ดังนั้น สำหรับบทนี้ เราจึงเขียนถึงสัญญาณในโดเมนเวลาได้เป็น

$$f(t)=f(t)u(t)$$

เพื่อให้การอธิบายกระชับ เราจึงอ้างถึงสัญญาณด้วยสัญลักษณ์ $f(t)$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 7.1-1 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย $u(t)$

จากนิยามตามสมการที่ (7.1) ผลการแปลงลาปลาซสามารถหาได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} (1)\cdot e^{-st}dt \\
&= \left(e^{-st} \cdot \frac{1}{-s} \right)_0^{\infty} \\
&= \left(-\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s} \right) - \left(\frac{e^{-s(0)}}{-s} \right) \\
&= -\left(\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s} \right) + \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

สำหรับพจน์ $\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s}$ เราจะขออธิบายการหาผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s} &= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(\sigma+j\omega)t}}{s} \\
&= \frac{1}{s} \lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} \\
&= \frac{1}{s} \lim_{t\to\infty} \left(e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} \right) \cdot \left(\lim_{t\to\infty} e^{-j\omega t} \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{e^{-\sigma\cdot\infty}} \right) \cdot \left(\lim_{t\to\infty} e^{-j\omega t} \right) \\
&= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{e^{-\sigma\cdot\infty}} \right) \cdot \left(\lim_{t\to\infty} \left(\cos\omega t - j\sin\omega t \right) \right)
\end{aligned}
$$

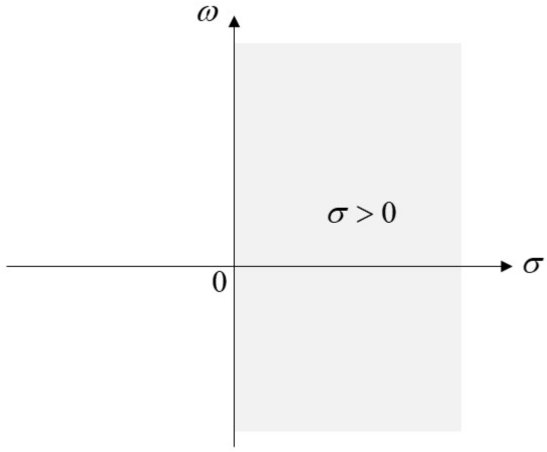
หากส่วนจริงของตัวแปรลาปลาซ $s = \sigma + j\omega$ มีค่ามากกว่าศูนย์ $\sigma > 0$ เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s} &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{e^{-\sigma\cdot\infty}} \right) \cdot \left(\lim_{t\to\infty} \left(\cos\omega t - j\sin\omega t \right) \right) \\
&= \frac{1}{s} (0) \cdot \left(\lim_{t\to\infty} \left(\cos\omega t - j\sin\omega t \right) \right), \ \sigma > 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้นในกรณีที่ $\sigma > 0$ เราก็จะได้ผลการแปลงลาปลาซเป็น

$$F(s) = -\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{s}\right) + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

ณ จุดนี้ เราสามารถกล่าวถึงผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซข้างต้น ได้หลายรูปแบบเช่น ผลการแปลงลาปลาซจะมีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ $\sigma > 0$ หรือ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sigma > 0$ หากพิจารณาระนาบเชิงซ้อนสำหรับตัวแปร s เราจะสามารถระบุถึงบริเวณลู่เข้าของการแปลงลาปลาซ (region of convergence) ได้ดังนี้



ภาพที่ 7.1 บริเวณลู่เข้าของการแปลงลาปลาซสำหรับตัวอย่างที่ 7.1-1

ก่อนจบตัวอย่างนี้ไป ผู้เขียนอยากแจ้งให้ทราบว่า ไม่ใช่ทุกสัญญาณที่จะหาผลการแปลงลาปลาซได้ อย่างไรก็ตาม เราโชคดีมากที่สัญญาณสำคัญๆทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้านั้นสามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้แทบทั้งหมด เมื่อสัญญาณเหล่านั้นมีผลการแปลงลาปลาซ เราก็สามารถที่จะระบุบริเวณลู่เข้าของผลการแปลงได้ แต่อย่างที่เห็นในตัวอย่างที่ 7.1-1 การพิจารณาบริเวณลู่เข้านั้นค่อนข้างยุ่งยากและวุ่นวาย ดังนั้นตลอดการอธิบายเรื่องการแปลงลาปลาซ ผู้เขียนจะขอละเรื่องบริเวณลู่เข้า และทึกทักไปเลยว่าผลการแปลงนั้นสามารถหาคำตอบได้

ตัวอย่างที่ 7.1-2 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f(t) = t$

ผลการแปลงลาปลาซสามารถหาได้จากนิยามตามสมการที่ (7.1) ดังนี้

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} t\cdot e^{-st}dt \\
&= \left(t\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty}\right) - \left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{-s}dt\right) \qquad ;\langle 1\rangle
\end{aligned}$$

$$= \left(\left(\lim_{t\to\infty} t \frac{e^{-st}}{-s} \right) - \left((0) \frac{e^{-s(0)}}{-s} \right) \right) - \left(\left. \frac{e^{-st}}{s^2} \right|_0^\infty \right)$$

$$= (0-0) - \left(\left(\frac{e^{-s(\infty)}}{s^2} \right) - \left(\frac{e^{-s(0)}}{s^2} \right) \right) \qquad ; \langle 2 \rangle$$

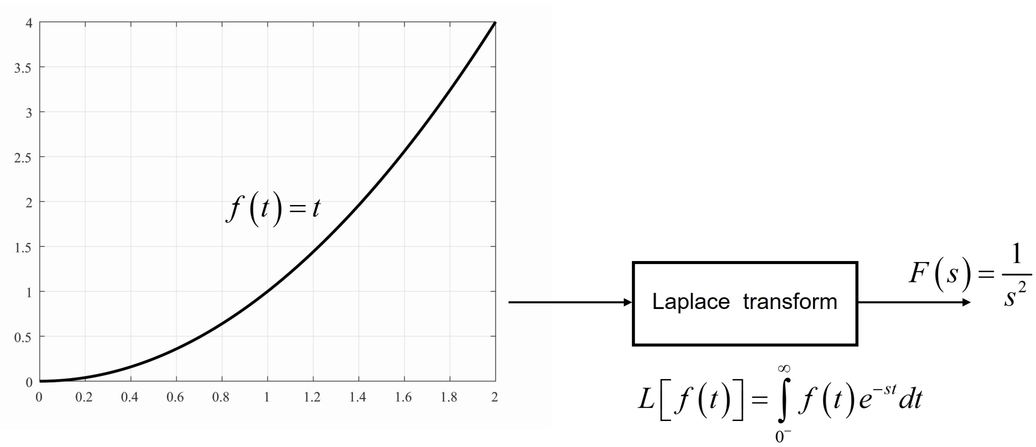
$$= -\left(0 - \frac{1}{s^2} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

หมายเหตุ $\langle 1 \rangle$ ได้มาจากการหาปริพันธ์แยกส่วน (integral by parts)

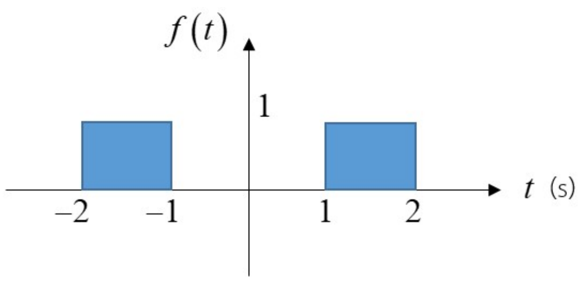
$\langle 2 \rangle$ได้มาจากพิจารณาบริเวณลู่เข้าของการแปลงลาปลาซเท่านั้น

หากเรามองการแปลงลาปลาซให้เป็นระบบระบบหนึ่ง ภาพที่ 7.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาท์พุตของการแปลงลาปลาซ สำหรับตัวอย่างนี้ อินพุตของการแปลงก็คือสัญญาณ $f(t) = t$ ส่วนผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงก็คือ $F(s) = \frac{1}{s^2}$



ภาพที่ 7.2 ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาท์พุตของการแปลงลาปลาซสำหรับตัวอย่างที่ 7.1-2

ตัวอย่างที่ 7.1-3 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้



ภาพที่ 7.3 สัญญาณสำหรับตัวอย่างที่ 7.1-3

ฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไขสำหรับสัญญาณในภาพข้างต้น สามารถเขียนได้เป็น

$$f(t)=\begin{cases}1, & -2\le t\le -1\\ 1, & 1\le t\le 2\end{cases}$$

จากนิยามตามสมการที่ (7.1) ผลการแปลงลาปลาซสามารถหาได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{-2}^{-1}(1)\cdot e^{-st}dt+\int_{1}^{2}(1)\cdot e^{-st}dt \\
&= \left(e^{-st}\cdot\frac{1}{-s}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(e^{-st}\cdot\frac{1}{-s}\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= \left(\left(\frac{e^{-s(-1)}}{-s}\right)-\left(\frac{e^{-s(-2)}}{-s}\right)\right)+\left(\left(\frac{e^{-s(2)}}{-s}\right)-\left(\frac{e^{-s(1)}}{-s}\right)\right) \\
&= \left(-\frac{e^{s}}{s}\right)+\left(\frac{e^{2s}}{s}\right)+\left(-\frac{e^{-2s}}{s}\right)+\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) \\
F(s) &= \frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{s}+e^{2s}-e^{-2s}\right)
\end{aligned}$$

จากสามตัวอย่างที่ผ่านไป เราจะได้เห็นว่าการแปลงลาปลาซนั้นต้องใช้ความรู้ทางแคลคูลัสและการหาปริพันธ์ก็ไม่ได้ทำได้ง่ายๆ ผู้ที่สนใจใคร่เรียนจึงรู้สึกว่ายากและน่าเบื่อ เพื่อให้เกิดความสะดวกและรวดเร็วในการหาผลการแปลง นักคณิตศาสตร์จึงได้ทำการรวบรวมคู่ผลการแปลงลาปลาซที่พบเจอบ่อยๆเอาไว้ ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันหรือสัญญาณที่เกี่ยวข้องกับวิศวกรรมไฟฟ้าซึ่งมักจะถูกนำมาใช้หรือกล่าวถึงบ่อยๆ ถูกสรุปเอาไว้ในตารางที่ 7.1 อย่าลืมนะว่า ! สัญญาณที่ปรากฏทั้งหมดในตารางข้างล่างนี้ ถูกนิยามสำหรับช่วงเวลา $t\ge 0,$ เท่านั้นและ $f(t)=f(t)u(t)$

ตารางที่ 7.1 คู่การแปลงลาปลาซ

	$f(t)$	$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
1)	$\delta(t)$	1
2)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3)	$k\in\mathbb{R}$	$\frac{k}{s}$
4)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

5)	t	$\frac{1}{s^2}$
6)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
7)	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8)	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
9)	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
10)	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
11)	$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
12)	$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta+\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
13)	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
14)	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

อนึ่ง คู่การแปลงลาปลาซระหว่างสัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ และสัญญาณในโดเมนความถี่เชิงซ้อน $F(s)$ นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f(t) \Leftrightarrow F(s)$

7.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ (Properties of Laplace Transform)

แม้ว่าตารางที่ 7.1 จะสามารถช่วยให้เราหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณพื้นฐานได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น แต่อย่างไรก็ตามสัญญาณในระบบไฟฟ้า ที่เราจำเป็นต้องพิจารณานั้น อาจไม่ได้อยู่ในรูปอย่างง่ายดังที่ปรากฏในตารางข้างต้น คุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการหาผลแปลงลาปลาซของสัญญาณที่อยู่ในรูปที่ซับซ้อนหรือถูกดำเนินการด้วยกรรมวิธีบางอย่าง สามารถเขียนสรุปได้ด้วยตารางที่ 7.2

ตารางที่ 7.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

คุณสมบัติ	$f(t)$	$F(s)$
1) Linearity	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_2F_2(s)+a_2F_2(s)$
2) Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
3) Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
4) Frequency shift	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$

5) Time differentiation	$\frac{df}{dt}$ $\frac{d^2 f}{dt^2}$ $\frac{d^3 f}{dt^3}$ $\frac{d^n f}{dt^n}$	$sF(s)-f(0^-)$ $s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$ $s^3F(s)-s^2f(0^-)-sf'(0^-)-f''(0^-)$ $s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)-...-f^{(n-1)}(0^-)$
6) Time integration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
7) Frequency differentiation	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$
8) Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
9) Time periodicity	$f(t)=f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$
10) Initial value	$f(0)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
11) Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
12) Convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

ตัวอย่างที่จะกล่าวถึงทั้งหมดในหัวข้อที่ 7.2 นี้ จะเป็นตัวอย่างของการหาผลการแปลงลาปลาซ โดยใช้การสังเกต คู่การแปลงลาปลาซในตารางที่ 7.1 และ คุณสมบัติในตารางที่ 7.2 ซึ่งนั่นก็หมายความว่า เราสามารถที่จะหาผลการแปลงลาปลาซได้สะดวกยิ่งขึ้น (ไม่ต้องหาปริพันธ์โดยตรง)

ตัวอย่างที่ 7.2-1 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f(t)=4+3e^{-3t}$

เราสามารถเขียนสัญญาณที่โจทย์กำหนดให้ได้เป็น

$$f(t)=f_1(t)+3f_2(t)$$

โดยที่

$f_1(t)=4$ และ $f_2(t)=e^{-3t}$

จากการสังเกตคู่การแปลง เราจะพบว่า

$$f_1(t)=4 \Leftrightarrow F_1(s)=\frac{4}{s}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 3)

$$f_2(t) = e^{-3t} \iff F_2(s) = \frac{1}{s+3}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 4)

จากคุณสมบัติที่ 1 (Linearity) เราก็จะได้ว่า

$$f(t) = f_1(t) + 3f_2(t) \iff F(s) = (1)F_2(s) + (3)F_2(s)$$

นั่นก็คือ

$$f(t) = 4 + 3e^{-3t} \iff F(s) = \frac{4}{s} + 3\frac{1}{s+3}$$

ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = 4 + 3e^{-3t}$ จึงมีค่าเป็น

$$F(s) = \frac{4}{s} + 3\frac{1}{s+3}$$

สำหรับตัวอย่างแรกของการหาผลการแปลงลาปลาซโดยวิธีสังเกตตารางที่ 7.1 และการใช้คุณสมบัติในตารางที่ 7.2 ผู้เขียนพยายามจะอธิบายทุกขั้นตอนโดยละเอียด (ซึ่งอาจดูเวิ่นเว้อเกินไป) สำหรับตัวอย่างถัดไป การอธิบายจะถูกทำให้ดูกระชับยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 7.2-2 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f(t) = \delta\,(t) - 2t + t^n$

$\delta\,(t) \iff 1$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 1)

$t \iff \dfrac{1}{s}$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 5)

$2t \iff 2\left(\dfrac{1}{s}\right)$ *คุณสมบัติที่ 1) Linearity

$t^2 \iff \dfrac{2!}{s^{2+1}} = \dfrac{2}{s^3}$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 6)

สุดท้ายจากคุณสมบัติที่ 1) Linearity

$$f(t) = \delta\,(t) - 2t + t^n$$

จึงมีผลการแปลงลาปลาซเป็น

$$F(s) = 1 - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-3 จากตัวอย่างที่ 7.1-3 คู่การแปลงลาปลาซเป็นดังนี้

$$f(t)=\begin{cases}1, & -2\le t\le -1\\ 1, & 1\le t\le 2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad F(s)=\frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{s}+e^{2s}-e^{-2s}\right)$$

จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f(2t)$

สัญญาณ $f(2t)$ จะถูกบีบอัดทางเวลาและมีสมการเป็นดังนี้

$$f(2t)=\begin{cases}1, & -1\le t\le 0.5\\ 1, & 0.5\le t\le 1\end{cases}$$

จากคุณสมบัติที่ 2) Time scaling ซึ่งเป็นดังนี้

$$f(at)\Leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

จากโจทย์ซึ่งมีตัวแปรในการบีบอัดทางเวลาเป็น $a=2$ เราก็จะเขียนได้ว่า

$$f\left((2)t\right)\Leftrightarrow \frac{1}{(2)}F\left(\frac{s}{2}\right)$$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(2t)$ จึงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}L\left[f\left(2t\right)\right]&=\frac{1}{(2)}F\left(\frac{s}{2}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s/2)}\left(e^{-(s/2)}-e^{(s/2)}+e^{2(s/2)}-e^{-2(s/2)}\right)\right)\\ &=\frac{1}{s}\left(e^{-(s/2)}-e^{(s/2)}+e^{s}-e^{-s}\right)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-4 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $g\left(t\right)=\sin\left(2t-2\right)u\left(t-1\right)$

เริ่มต้นที่การพิจารณาสัญญาณต่อไปนี้

$$\sin\left(2t\right)=\sin\left(2t\right)u\left(t\right)$$

หากเราทำการหน่วงทางเวลา โดยกำหนดให้ $t \to (t-1)$ เราจะได้สัญญาณใหม่เป็น

$$\sin\left(2\left(t-1\right)\right) = \sin\left(2\left(t-1\right)\right)u\left(\left(t-1\right)\right) = \sin\left(2t-2\right)u\left(t-1\right)$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ก็คือสัญญาณที่เราจะนำไปหาผลการแปลงลาปลาซ

*สังเกตคู่การแปลงที่ 9)

$$\sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

เราจึงได้ว่า

$$\sin\left(\left(2\right)t\right) \Leftrightarrow \frac{\left(2\right)}{s^2+\left(2\right)^2}$$

ให้เราเทียบ *คุณสมบัติที่ 3) Time shift กับ ผลลัพธ์ข้างต้น ดังนี้

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}F(s)$$

$$\underbrace{\sin\left(2t\right)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{s^2+4}}_{F(s)}$$

$$\underbrace{\sin\left(2(t-1)\right)u\left(\left(t-1\right)\right)}_{f(t-a)u(t-a)} \Leftrightarrow \underbrace{e^{-(1)s}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)}_{e^{-as}F(s)}$$

$$\sin\left(2t-2\right)u\left(t-1\right) \Leftrightarrow e^{-s}\frac{2}{s^2+4}$$

ดังนั้น ผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $g\left(t\right) = \sin\left(2t-2\right)u\left(t-1\right)$ ก็คือ

$$G\left(s\right) = e^{-s}\frac{2}{s^2+4}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-5 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f\left(t\right) = \cos\left(3t+3\right)u\left(t+1\right)$

ตัวอย่างนี้ เราจะหาผลการแปลงลาปลาซโดยใช้หลักคิด คล้ายๆกับตัวอย่างที่แล้ว

$$\cos\left(3t\right)u\left(t\right) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2-9}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 10)

$$\cos\left(3\left(t+1\right)\right)u\left(t+1\right)\Leftrightarrow e^{-(-1)s}\left(\frac{s}{s^2-9}\right)$$ *คุณสมบัติที่ 3) Time shift

$$\cos\left(3t+3\right)u\left(t+1\right)\Leftrightarrow e^{s}\frac{s}{s^2-9}$$

ผลการแปลงลาปลาซจึงมีค่าเท่ากับ

$$F\left(s\right)=e^{s}\frac{s}{s^2-9}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-6 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $g(t)=e^{-2t}t^2-e^{3t}t^3+e^{3t}\delta\left(t\right)$

*สังเกตคู่การแปลงที่ 6)

$$t^2 \Leftrightarrow \frac{2}{s^3}$$

การนำ e^{-2t} มาคูณกับ t^2 หมายถึง *คุณสมบัติ 4) Frequency shift

$$e^{-at}f(t)\Leftrightarrow F(s+a)$$

$$e^{-2t}t^2 \Leftrightarrow \frac{2}{\left(s+2\right)^3}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$t^3 \Leftrightarrow \frac{3!}{s^4}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 6)

$$e^{3t}t^3 \Leftrightarrow \frac{6}{\left(s-3\right)^4}$$ *คุณสมบัติ 4) Frequency shift

สำหรับการแปลงสัญญาณ $e^{3t}\delta\left(t\right)$ เราสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\delta\left(t\right)\Leftrightarrow 1$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 1)

เราสังเกตได้ชัดเจนว่า ผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซนั้นไม่มีตัวแปร s

ดังนั้นการคูณ e^{3t} มาคูณกับ $\delta\left(t\right)$ จึงไม่มีผลในโดเมนความถี่เชิงซ้อน เราจึงได้ว่า

$$e^{3t}\delta\left(t\right)\Leftrightarrow 1$$

สุดท้าย เราก็จะใช้ *คุณสมบัติ 1) Linearity เพื่อหาผลการแปลงลาปลาซของ

$$g(t) = e^{-2t}t^2 - e^{3t}t^3 + e^{3t}\delta(t)$$

และได้ผลลัพธ์ของการแปลงเป็น

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{6}{(s-3)^4} + 1$$

ตัวอย่างที่ 7.2-7 ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการแสดงให้เห็นถึง *คุณสมบัติที่ 5) Time differentiation

1. พิจารณาฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลต่อไปนี้

$$f(t) = e^t$$

$$e^t \Leftrightarrow \frac{1}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$f(0) = f(t=0) = e^t\Big|_{t=0} = e^{(0)} = 1$$

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \frac{d(e^t)}{dt} = e^t$$

อนุพันธ์ของสัญญาณ $f(t)$ มีค่าเท่ากับสัญญาณตั้งต้น ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซก็ต้องมีค่าเท่ากัน

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$e^t \Leftrightarrow s\left(\frac{1}{s-1}\right) - 1$$

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = s\left(\frac{1}{s-1}\right) - 1$$

$$= \frac{s}{s-1} - \frac{s-1}{s-1}$$

$$= \frac{1}{s-1}$$

2. พิจารณาฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$f(t)=\sin(2t)=\sin(2\cdot t)$$

$$\sin(2\cdot t) \Leftrightarrow \frac{(2)}{s^2+(2)^2}$$

$$F(s)=\frac{2}{s^2+4} \quad \text{และ} \quad f(0)=\sin\big(2(0)\big)=0$$

อนุพันธ์ของสัญญาณ $f(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$f'(t)=\frac{df}{dt}=\frac{d\big(\sin(2\cdot t)\big)}{dt}=2\cdot\cos(2t)$$

หากเราหาผลการแปลงลาปลาซของ $f'(t)$ โดยตรง เราจะได้ว่า

$$2\cos(2\cdot t) \Leftrightarrow \frac{2s}{s^2+4}$$

หากเราหาผลการแปลงลาปลาซของ $f'(t)$ จาก *คุณสมบัติที่ 5) Time differentiation

โดยที่เราทราบว่า $2\cdot\cos(2t)=\dfrac{df}{dt}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซก็ต้องมีค่าเท่ากับ $\dfrac{2s}{s^2+4}$

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow sF(s)-f(0)$$

$$\frac{d(\sin 2\cdot t)}{dt} \Leftrightarrow s\underbrace{\left(\frac{2}{s^2+4}\right)}_{F(s)}-\underbrace{(0)}_{f(0)}$$

$$L\left[\frac{df}{dt}\right]=L\big[2\cdot\cos(2t)\big]=\frac{2s}{s^2+4}$$

3. พิจารณาฟังก์ชัน $f(t)=t$ ซึ่งมี

$$F(s)=\frac{1}{s^2} \quad \text{และ} \quad f(0)=0$$

หากเราหาผลการแปลงลาปลาซของ $f'(t)$ โดยตรง เราจะได้ว่า

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(t)}{dt} = 1 = 1 \cdot u(t) = u(t)$$

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

ทีนี้ เรามาลองหาผลการแปลงลาปลาซของ $f'(t)$ จาก *คุณสมบัติที่ 5) Time differentiation

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\frac{d(t)}{dt} \Leftrightarrow s\underbrace{\left(\frac{1}{s^2}\right)}_{F(s)} - \underbrace{(0)}_{f(0)}$$

$$= \frac{1}{s}$$

ซึ่งผลลัพธ์ของการแปลงก็มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 7.2-8 พิจารณาคู่การแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f(t) = t^2$

$$\underbrace{t^2}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{s^3}}_{F(s)}$$

หากเราหาผลการแปลงลาปลาซของ $g(t) = \int_0^t t^2 dt$

เราสามารถใช้ *คุณสมบัติที่ 6) Time integration ได้

$$\int_0^t f(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$$

$$\underbrace{\int_0^t t^2 dt}_{g(t)} \Leftrightarrow \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{s^3}\right)}_{F(s)}$$

$$\therefore G(s) = \frac{2}{s^4}$$

ทีนี้ เรามาลองหาผลการแปลงลาปลาซของ $g(t) = \int_0^t t^2 dt$ โดยการหาปริพันธ์ก่อน

(ซึ่งผู้อ่านควรคิดคล้อยตามว่ามันยุ่งยากกว่าการใช้คุณสมบัติ)

$$g(t)=\int_0^t t^2 dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^t=\frac{t^3}{3}$$

$$\frac{1}{3}t^3 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}\left(\frac{3!}{s^4}\right)=\frac{2}{s^4}$$

และแน่นอนว่าผลลัพธ์ของการแปลงก็มีค่าเท่ากันกับการใช้คุณสมบัติ

ตัวอย่างที่ 7.2-9 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $y(t)=t\sin(t)+t^2\cos(\pi t)$

เราสามารถหาผลการแปลงโดยทำการแยกพจน์ ตาม *คุณสมบัติที่ 1) Linearity ดังนี้

$$y(t)=\underbrace{t\sin(-2t)}_{f_1(t)}+\underbrace{t^2\cos(\pi t)}_{f_2(t)}$$

สำหรับ $f_1(t)$ เราจะเริ่มที่พจน์ย่อย $\sin(-2\cdot t)$

$$\underbrace{\sin(-2\cdot t)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{-2}{s^2+(-2)^2}}_{F(s)}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 9)

หลังจากนั้น เราจะใช้ *คุณสมบัติที่ 7) Frequency differentiation ดังนี้

$$t^n f(t) \Leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$t^{(1)} f(t) \Leftrightarrow (-1)^1 \frac{dF(s)}{ds}$$

$$tf(t) \Leftrightarrow (-1)^1 \frac{d\left(\dfrac{-2}{s^2+4}\right)}{ds}$$

$$=(-1)\frac{\left((s^2+4)\dfrac{d(-2)}{ds}\right)-\left((-2)\dfrac{d(s^2+4)}{ds}\right)}{(s^2+4)^2}$$

$$F_1(s)=\frac{2s}{(s^2+4)^2}$$

สำหรับ $f_2(t)$ ก็จะมีวิธีทำคล้ายๆกับ $f_1(t)$ ดังนี้ $t^2\cos(\pi t)$

$$\underbrace{\cos(\pi t)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{s}{s^2+\pi^2}}_{F(s)}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 9)

$$t^2 f(t) \Leftrightarrow (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2}$$ *คุณสมบัติที่ 7) Frequency differentiation

$$t^2\cos(\pi t) \Leftrightarrow (-1)^2 \frac{d^2\left(\frac{s}{s^2+\pi^2}\right)}{ds^2}$$

$$=\frac{dz}{ds} \qquad ;\ z(s)=\frac{\left(\left(s^2+\pi^2\right)\frac{d(s)}{ds}\right)-\left((s)\frac{d\left(s^2+\pi^2\right)}{ds}\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)^2}$$

$$=\frac{d\left(\frac{\pi^2-s^2}{\left(s^2+\pi^2\right)^2}\right)}{ds}$$

$$=\frac{\left(\left(s^2+\pi^2\right)^2\frac{d\left(\pi^2-s^2\right)}{ds}\right)-\left(\left(\pi^2-s^2\right)\frac{d\left(\left(s^2+\pi^2\right)^2\right)}{ds}\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)^4}$$

$$=\frac{\left(\left(s^2+\pi^2\right)^2(-2s)\right)-\left(\left(\pi^2-s^2\right)2\left(s^2+\pi^2\right)(2s)\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)^4}$$

$$=\frac{\left(-2s^5-4s^3\pi^2-2s\pi\right)-\left(\left(4s\pi^4-4s^5\right)\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)^4}$$

$$F_2(s)=\frac{2s^5-4s\pi^4-4s^3\pi^2-2s\pi}{\left(s^2+\pi^2\right)^4}$$

เราสามารถหาผลการแปลงโดยทำการแยกพจน์ ตาม *คุณสมบัติที่ 1) Linearity ดังนี้

$$Y(s)=\underbrace{\frac{2s}{\left(s^2+4\right)^2}}_{F_1(s)}+\underbrace{\frac{2s^5-4s\pi^4-4s^3\pi^2-2s\pi}{\left(s^2+\pi^2\right)^4}}_{F_2(s)}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-10 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $y\left(t\right)=\dfrac{\sin t}{t}$

*สังเกตคู่การแปลงที่ 9)

$$\underbrace{\sin\left(1\cdot t\right)}_{f(t)} \Leftrightarrow \frac{1}{\underbrace{s^2+1}_{F(s)}}$$

*จากคุณสมบัติที่ 8) Frequency integration

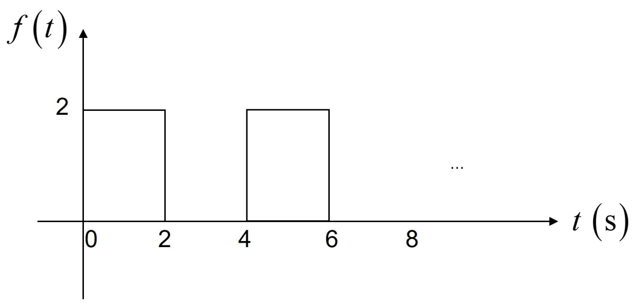
$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^\infty F(s)ds$$

เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow & \int_s^\infty\left(\frac{1}{s^2+1}\right)ds \\ &= \int_s^\infty\left(\frac{1}{s^2+1}\right)ds \\ &= \tan^{-1}\left(s\right)\Big|_s^\infty \\ &= \left(\tan^{-1}\left(\infty\right)\right)-\left(\tan^{-1}\left(s\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(s\right)\end{aligned}$$

ผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณจึงมีค่าเท่ากับ $Y\left(s\right)=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(s\right)$

ตัวอย่างที่ 7.2-11 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้



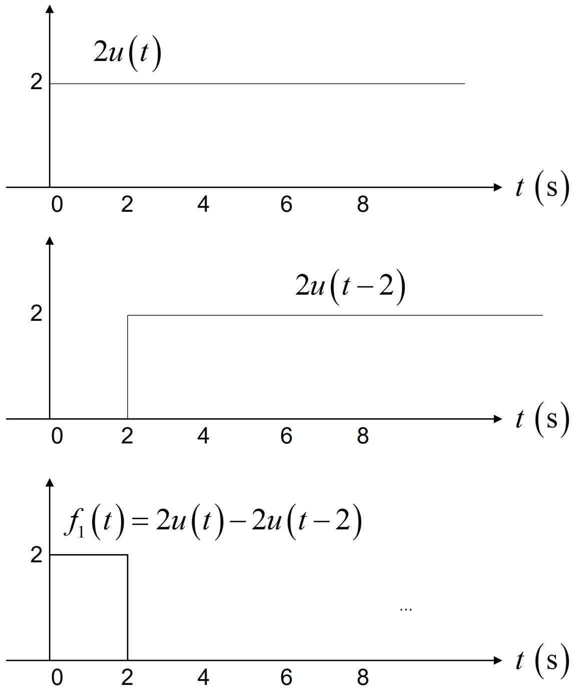
ภาพที่ 7.4 สัญญาณสำหรับตัวอย่างที่ 7.2-11

สัญญาณข้างต้นเป็นสัญญาณรายคาบ ที่มีคาบเท่ากับ 4 วินาที

$$f(t)=f(t+nT)=f(t+n2)$$

กำหนดให้ $f_1(t)$ คือ สัญญาณในโดเมนเวลาที่ตัดมาพิจารณาเพียงแค่คาบเดียว ภาพที่ 7.5 แสดงให้เห็นว่า สัญญาณ $f_1(t)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลลบของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วยได้

$$f_1(t) = 2u(t) - 2u(t-2)$$



ภาพที่ 7.5 สัญญาณ $f_1(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.2-11

ผลการแปลงลาปลาซของ $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$ เป็นดังนี้

$$F_1(s) = \frac{2}{s} - e^{-2s}\frac{2}{s}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 2)

*คุณสมบัติที่ 1) Linearity และคุณสมบัติที่ 3) Time shift

หากพิจารณา *คุณสมบัติที่ 9) Time periodicity เราก็จะได้ว่า

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} \quad ; T = 4$$

เมื่อ $F_1(s)$ คือ ผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณ $f_1(t)$

ดังนั้นเราจึงได้ผลการแปลงของสัญญาณรายคาบในตัวอย่างนี้เป็น

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$
$$= \frac{\left(\frac{2}{s} - e^{-2s}\frac{2}{s}\right)}{1-e^{-s(4)}}$$
$$= \frac{2\left(1-e^{-2s}\right)}{s\left(1-e^{-4s}\right)}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-12 หากกำหนดให้สัญญาณ $f(t) = u\left(t-t_0\right) * e^{-\tau_0 t}$ จงหา $F\left(s\right)$

จากโจทย์ เราจะได้ว่า $f(t)$

เกิดจากการคอนโวลูชันระหว่างสัญญาณ $u\left(t-t_0\right)$ และ สัญญาณ $e^{-\tau_0 t}$

$$u\left(t-t_0\right) \Leftrightarrow \frac{e^{-t_0 s}}{s}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 2) และคุณสมบัติที่ 5) Time shift

$$e^{\tau_0 t} \Leftrightarrow \frac{1}{s+\tau_0}$$ *สังเกตคู่การแปลงที่ 4)

จากคุณสมบัติที่ 12) Convolution

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

ซึ่งมีความหมายว่า

“การคอนโวลูชันในโดเมนเวลา มีค่าเท่ากับ ผลคูณธรรมดาในโดเมนความถี่”

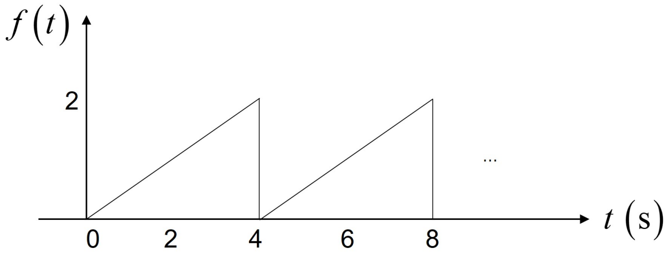
เราจึงเขียนได้ว่า

$$\underbrace{u\left(t-t_0\right)}_{f_1(t)} * \underbrace{e^{-\tau_0 t}}_{f_2(t)} \Leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$
$$= \left(\frac{e^{-t_0 s}}{s}\right) \cdot \left(\frac{1}{s+\tau_0}\right)$$

ดังนั้น สุดท้ายเราจึงได้ผลลัพธ์การแปลงลาปลาซเป็น

$$F\left(s\right) = \frac{e^{-t_0 s}}{s^2 + \tau_0 s}$$

ตัวอย่างที่ 7.2-13 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้



ภาพที่ 7.6 สัญญาณ $f(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.2-13

สัญญาณข้างต้นเป็นสัญญาณรายคาบ หากตัดมาพิจารณาเพียงคาบเดียว เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= 0.5t, \quad 0 \le t \le 4 \\
&= 0.5t\left(u(t) - u(t-4)\right) \\
&= 0.5tu(t) - 0.5\left[tu(t-4)\right] \\
&= 0.5tu(t) - 0.5\left[(t-4+4)u(t-4)\right] \\
&= 0.5tu(t) - 0.5\left[(t-4)u(t-4) + (4)u(t-4)\right] \\
&= \left[0.5tu(t)\right] - \left[0.5(t-4)u(t-4)\right] - \left[2u(t-4)\right]
\end{aligned}$$

ผลการแปลงลาปลาซสำหรับ $f_1(t)$ จึงเขียนได้เป็น

$$F_1(s) = 0.5\frac{1}{s^2} - 0.5e^{-4s}\frac{1}{s^2} - 2e^{-4s}\frac{1}{s}$$

เราจึงเขียนผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณรายคาบในตัวอย่างนี้ได้เป็น

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} \\
&= \frac{0.5\frac{1}{s^2} - 0.5e^{-4s}\frac{1}{s^2} - 2e^{-4s}\frac{1}{s}}{1-e^{-4s}}
\end{aligned}$$

7.3 การแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform)

การแปลงลาปลาซสามารถเปลี่ยนสัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ ให้กลายเป็นสัญญาณในโดเมนความถี่เชิงซ้อน $F(s)$ ได้ฉันใด สัญญาณในโดเมนความถี่เชิงซ้อน $F(s)$ ก็สามารถแปลงกลับมาให้เป็นสัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ ได้ฉันนั้น นิยามทางคณิตศาสตร์ของการแปลงกลับมา เป็นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \\
&= L^{-1}\left[F(s)\right]
\end{aligned}$$

เมื่อ x คือค่าที่เกี่ยวข้องกับบริเวณลู่เข้า ดังที่ได้อธิบายไว้ในตัวอย่างที่ 7.1-1 ถึงผมจะไม่บอกแต่ผู้อ่านก็พอรู้สึกได้เองโดยสัญชาตญาณว่า การใช้ปริพันธ์ข้างต้นเพื่อแปลง $F(s)$ ให้กลับมาเป็นสัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ นั้น มัน "ยาก" เหลือเกิน ดังนั้นผู้เขียนจะไม่ขอพูดถึงเนื้อหาการแปลงกลับโดยการใช้ปริพันธ์ที่นิยามด้วยสมการข้างต้นในตำราเล่มนี้เลย แต่ เราจะใช้คู่การแปลงลาปลาซในตารางที่ 7.1 ประกอบกับคุณสมบัติในตารางที่ 7.2 และ เทคนิคที่มีชื่อเรียกว่า การแยกเศษส่วนย่อย (partial fraction) ในการหาผลการแปลงกลับดังกล่าว ชื่อเรียกอย่างเป็นทางการของการแปลงกลับนี้คือ "***การแปลงลาปลาซผกผัน***" เกือบลืมพูด ! สัญลักษณ์ $L^{-1}\left[F(s)\right]$ ที่ปรากฏในสมการข้างต้น มีความหมายในทำนองที่ว่า "จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของสัญญาณ $F(s)$"

ตัวอย่าง 7.3-1 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$F(s) = 6\frac{s+2}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

หากเราพิจารณาฟังก์ชันข้างต้น เทียบกับคู่การแปลงลาปลาซ ในตารางที่ 7.1 และคุณสมบัติในตารางที่ 7.2 เราจะพบว่าเราไม่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้ตรงๆ เราจึงต้องใช้การแยกเศษส่วนย่อยเพื่อจัดรูปของฟังก์ชันดังกล่าวใหม่ วิธีทำเป็นดังต่อไปนี้

เราจะสมมุติว่า $F(s)$ สามารถแยกออกมาเป็นผลบวกของสามพจน์ ดังนี้

$$6\frac{s+2}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

โดยที่ $A,$ B และ C คือค่าคงที่ ต่อมา เราจะคูณไขว้สมการข้างต้น ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น

$$6(s+2) = A(s+3)(s+4) + B(s+1)(s+4) + C(s+1)(s+3)$$

โดยผู้เขียนจะเรียกสมการที่ได้หลังจากการคูณไขว้ ว่า สมการหลัก

หากเราต้องการหาค่า A เราจะแทนค่า $s=-1$ ลงในสมการหลัก และได้ผลเป็นดังนี้

$$6(-1+2) = A(-1+3)(-1+4) + B(-1+1)(-1+4) + C(-1+1)(-1+3)$$
$$6 = 6A$$
$$A = 1$$

ในทำนองเดียวกัน การหาค่า B ก็ทำได้โดยแทน $s=-3$ ลงในสมการหลัก ดังนี้

$$6(-3+2)=A(-3+3)(-3+4)+B(-3+1)(-3+4)+C(-3+1)(-3+3)$$
$$-6=-2B$$
$$B=3$$

ส่วนค่า B ก็จะหาได้โดยการแทน $s=-4$ ซึ่งจะได้เป็น

$$6(-4+2)=A(-4+3)(-4+4)+B(-3+1)(-4+4)+C(-4+1)(-4+1)$$
$$-12=3C$$
$$C=-4$$

เราจึงสามารถสรุปได้ว่า

$$F(s)=6\frac{s+2}{(s+1)(s+3)(s+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+4}\ =\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+3}+\frac{-4}{s+4}$$

หากพิจารณาคู่การแปลงลาปลาซในตารางที่ 7.1 เราจะพบว่า

$$\frac{1}{s+1}\Leftrightarrow e^{-t}$$
$$\frac{1}{s+3}\Leftrightarrow e^{-3t}$$
$$\frac{1}{s+4}\Leftrightarrow e^{-4t}$$

ด้วย *คุณสมบัติที่ 1) Linearity จากตารางที่ 7.2 เราก็จะเขียนได้ว่า สัญญาณ

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+3}+\frac{-4}{s+4}$$

มีผลการแปลงลาปลาซผกผันเป็น

$$f(t)=e^{-t}+e^{-3t}-e^{-4t}$$

ขั้นตอนที่มักจะผิดพลาดก็คือ ขั้นตอนการแยกเศษส่วนย่อย ผู้เขียนขอแนะนำว่าเราสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้ดังนี้

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+3}-\frac{4}{s+4}\\&=\frac{(s+3)+3(s+1)}{(s+1)(s+3)}-\frac{4}{s+4}\\&=\frac{s+3+3s+3}{(s+1)(s+3)}-\frac{4}{s+4}\\&=\frac{4s+6}{(s+1)(s+4)}-\frac{4}{s+4}\end{aligned}$$

$$= \frac{(4s+6)(s+4)-4\left[(s+1)(s+3)\right]}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$
$$= \frac{4s^2+16s+6s+24-4s^2-16s-12}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$
$$= \frac{6s+12}{(s+1)(s+3)(s+4)} = 6\frac{s+2}{(s+1)(s+3)(s+4)} = F(s)$$

หากผลลัพธ์สุดท้ายคือโจทย์
เราก็จะมั่นใจได้ว่าการคำนวณที่เกิดขึ้นในเทคนิคแยกเศษส่วนย่อยไม่มีอะไรผิดพลาด

ตัวอย่าง 7.3-2 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

ในกรณีที่ตัวส่วน มีตัวประกอบซ้ำ เราจะแยกพจน์ย่อยได้ดังนี้

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

โดยที่ $A,$ B และ C คือค่าคงที่ ต่อมา เราจะคูณไขว้สมการข้างต้น

$$2 = A(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+1) \qquad \text{(สมการหลัก)}$$

หากเราต้องการหาค่า A เราจะแทนค่า $s=-1$ ลงในสมการหลัก และได้ผลเป็นดังนี้

$$2 = A(1)^2 + B(0)(1) + C(0)$$
$$2 = A$$

การหาค่า C ทำได้โดยแทน $s=-2$ ลงในสมการหลัก ดังนี้

$$2 = A(0)^2 + B(-1)(0) + C(-1)$$
$$-2 = C$$

ส่วนการหาค่า B เราจะสังเกตได้ว่า ไม่มีค่า s ใดที่จะทำให้พจน์ของ A และ C หายไป

$$2 = A(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+1)$$

เราจึงแทนค่า A และ C ที่ได้มาลงไป

$$2 = (2)(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) + (-2)(s+1)$$

$$2 = 2(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) - 2(s+1)$$

และพอถึงจุดนี้ เราก็จะกำหนดให้ $s = 0$ (ซึ่งจะใช้ค่าอื่นก็ได้ ได้คำตอบเท่ากัน)

$$2 = (2)(2)^2 + B(1)(2) + (-2)(1)$$
$$-2 = B$$

เราจึงแยกเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$
$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

ผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซผกผันก็ทำได้โดยการสังเกตตารางที่ 7.1 และ 7.2

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

ตัวอย่าง 7.3-3 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

สำหรับตัวอย่างนี้ $(s^2+4s+13)$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ การแยกเศษส่วนย่อยทำได้ดังนี้

$$\frac{10}{(s+1)(s^2+4s+13)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+c}{s^2+4s+13}$$

จัดรูปสมการ

$$10 = A(s^2+4s+13) + (Bs+C)(s+1)$$
$$= As^2 + Bs^2 + 4As + Bs + Cs + 13A + c$$

จากตรงนี้เราจะเขียนได้ว่า

$$0s^2 + 0s + 10 = (A+B)s^2 + (4A+B+C)s + 13A + C$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ เราจะได้สมการเชิงเส้น สามสมการ ดังนี้

$$A + B = 0 \ ,$$
$$4A + B + C = 0 \ ,$$
$$13A + C = 10$$

หลังจากแก้ระบบสมการเชิงเส้นเรียบร้อย เราก็จะได้สัมประสิทธิ์ของการแยกเศษส่วนย่อย

$$A=-1\ ,\ B=-1\ ,\ C=-3$$

เราจึงสรุปการแยกเศษส่วนย่อยได้ว่า

$$F(s)=\frac{10}{(s+1)\left(s^2+4s+13\right)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+c}{s^2+4s+13}=\frac{1}{s+1}-\frac{s+3}{s^2+4s+13}$$

เราจะจัดรูปพจน์ที่สองเพื่อให้หาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{s+1}-\left(\frac{s+3}{s^2+4s+13}\right)\\&=\frac{1}{s+1}-\left(\frac{s+3}{s^2+4s+(4-4)+13}\right)\\&=\frac{1}{s+1}-\left(\frac{s+3}{\left(s^2+4s+4\right)+(-4+13)}\right)\\&=\frac{1}{s+1}-\left(\frac{s+3}{(s+2)^2+3^2}\right)\\&=\frac{1}{s+1}-\left(\frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}\right)\\&=\frac{1}{s+1}-\left(\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right)-\left(\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)\end{aligned}$$

สังเกตตารางที่ 7.1 และ 7.2

$$\frac{1}{s+1}\ \Leftrightarrow\ e^{-t}$$

$$\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\ \Leftrightarrow\ e^{-2t}\cos 3t$$

$$\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

เราก็จะได้ผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซผกผันเป็น

$$f(t)=e^{-t}-e^{-2t}\cos 3t-\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

ตัวอย่าง 7.3-4 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$F(s)=\frac{s}{s-1}$$

สำหรับตัวอย่างนี้ ให้เราหารยาวก่อน

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline s-1 & s \\ & \underline{s-1} \\ & 1 \end{array}$$

เราจึงจัดรูปสัญญาณได้ใหม่เป็น

$$F(s)=\frac{s}{s-1}=1+\frac{1}{s-1}$$

สังเกตตารางที่ 7.1 และ 7.2

$$1 \Leftrightarrow \delta(t)$$

$$\frac{1}{s-1} \Leftrightarrow e^{t}$$

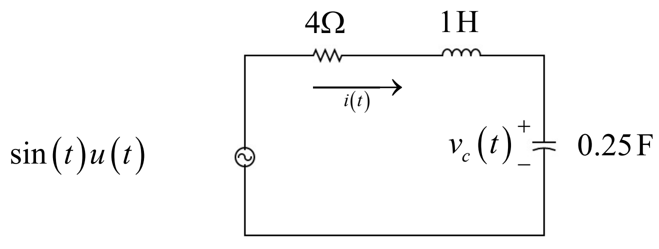
ผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซผกผันจึงเขียนได้เป็น

$$f(t)=\delta(t)+e^{t}$$

7.4 การประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ (Application to Differential Equations)

เรื่องสำคัญอีกหนึ่งเรื่องที่ควรรู้เกี่ยวกับการแปลงลาปลาซก็คือการประยุกต์ใช้หาคำตอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นที่ทราบกันดีว่า วิธีหาคำตอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือที่ชอบเรียกกันว่า “สมการติดดิฟ” นั้นทำได้ค่อนข้างยาก แต่หากท่านผู้อ่านเข้าใจหลักการแปลงลาปลาซ ท่านจะสามารถใช้การแปลงนี้เป็นเครื่องมือเปลี่ยนสมการติดดิฟให้กลายเป็นสมการพีชคณิตซึ่งสามารถหาคำตอบได้ง่ายอย่างกับปลอกกล้วยเข้าปาก

ตัวอย่าง 7.4-1 พิจารณาวงจงไฟฟ้าต่อไปนี้



ภาพที่ 7.7 วงจรไฟฟ้าสำหรับตัวอย่างที่ 7.4-1

จากวงจรข้างต้น เราจะเขียนสมการด้วยกฎของเคอร์ชอฟฟ์ ได้ดังนี้

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+v_c(t)=\sin(t)u(t)$$

หากเราแทนค่า $i(t)=C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$ และจัดรูปสมการนิดหน่อย เราก็จะได้

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v(t)=\frac{1}{LC}\sin(t)u(t)$$

แทนค่าตัวแปรต่างๆที่ทราบค่า ก็จะได้เป็น

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+4\frac{dv_c(t)}{dt}+4v_c(t)=4\sin(t)u(t)$$

หากเราต้องการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ อันที่เห็นอยู่ตรงนี้ แบบตรงๆ เพื่อหา แรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ $v_c(t)$ เราจะพบเลยว่า มันค่อนข้างยุ่งยาก และ เราจะไปใช้เทคนิคการแปลงลาปลาซ แทน ! กำหนดให้

$$v_c(t) \Leftrightarrow V_c(s)$$

การแปลงลาปลาซสามารถเปลี่ยนสมการที่ติดตัวแปร t ให้กลายเป็นสมการที่ติดตัวแปร s

$$\underbrace{\left[s^2V_c(s)-sv_c(0)-v_c^{'}(0)\right]}_{L\left[\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}\right]}+4\underbrace{\left[sV_c(s)-v_c(0)\right]}_{L\left[\frac{dv_c(t)}{dt}\right]}+4\underbrace{V_c(s)}_{L[v_c(t)]}=4\underbrace{\frac{1}{s^2+(1)^2}}_{L[\sin(t)u(t)]}$$

หากกำหนดค่าเริ่มต้นของความต่างศักย์ให้เป็น $v_c(0)=v_c^{'}(0)=0$

$$\left[s^2V_c(s)\right]+4\left[sV_c(s)\right]+4V_c(s)=4\frac{1}{s^2+1}$$

$$s^2V_c(s)+4sV_c(s)+4V_c(s)=\frac{4}{s^2+1}$$

$$V_c(s)\left[s^2+4s+4\right]=\frac{4}{s^2+1}$$

$$V_c(s)=\left(\frac{1}{s^2+4s+4}\right)\left(\frac{4}{s^2+1}\right)$$

$$V_c(s)=\frac{4}{(s+2)^2(s^2+1)}$$

กระทำการแยกเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$V_c(s)=\frac{4}{(s^2+1)(s+2)^2}=\frac{A}{(s+2)}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

โดยที่

$$4=\left(s^2+1\right)\left(s+2\right)A+\left(s^2+1\right)B+\left(s+2\right)^2 sC+\left(s+2\right)^2 D$$

โดยที่

$$\begin{aligned}&\left(0\right)s^3+\left(0\right)s^2+\left(0\right)s+4\\&=\left(A+C\right)s^3+\left(2A+B+4C+D\right)s^2+\left(A+4C+4D\right)s+\left(2A+B+4D\right)\end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ เราจะได้สมการเชิงเส้น 4 สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned}&A+C=0\ ,\\&2A+B+4C+D=0\ ,\\&A+4C+4D=0\\&2A+B+4D=4\end{aligned}$$

เราจึงแยกเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)^2}\\&=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{\left(s+2\right)^2}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}-\frac{2}{\left(s+2\right)^2}\end{aligned}$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น เราก็จะได้สัมประสิทธิ์สำหรับการแยกเศษส่วนย่อย ดังนี้

$$A={}^{16}\!/_{25}\ ,\ B={}^{4}\!/_{5}\ ,\ C=-{}^{16}\!/_{25}\ ,\ D={}^{12}\!/_{25}$$

เราจึงสรุปการแยกเศษส่วนย่อยได้ว่า

$$\begin{aligned}V_c\left(s\right)&=\frac{4}{\left(s+2\right)^2\left(s^2+1\right)}=\frac{16}{25}\frac{1}{\left(s+2\right)}+\frac{4}{5}\frac{1}{\left(s+2\right)^2}+\frac{1}{25}\left(\frac{-16s+12}{s^2+1}\right)\\&=\frac{16}{25}\frac{1}{\left(s+2\right)}+\frac{4}{5}\frac{1}{\left(s+2\right)^2}-\left(\frac{16}{25}\frac{s}{s^2+1}\right)-\left(\frac{196}{25}\frac{1}{s^2+1}\right)\end{aligned}$$

สังเกตตารางที่ 7.1 และ 7.2 เราจะได้

$$\frac{16}{25}\frac{1}{\left(s+2\right)}\ \Leftrightarrow\ \frac{16}{25}e^{-2t}$$

$$\frac{4}{5}\frac{1}{\left(s+2\right)^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{4}{5}te^{-2t}$$

$$\frac{-16}{25}\frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow \frac{-16}{25}\cos t$$
$$\frac{-192}{25}\frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow \frac{-192}{25}\sin t$$

แรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เราต้องการ จึงสามารถหาได้ด้วยการแปลงลาปลาซผกผัน

$$v_c(t) = \frac{16}{25}e^{-2t} + \frac{4}{5}te^{-2t} - \frac{16}{25}\cos t - \frac{192}{25}\sin t$$

ตัวอย่าง 7.4-2 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยการใช้เทคนิคการแปลงลาปลาซ

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{2dv(t)}{dt} + v(t) = u(t)$$
$$v(0) = 1\ ,\ v'(0) = -1$$

เมื่อกำหนดให้คู่การแปลงลาปลาซ $v(t) \Leftrightarrow V(s)$

รายละเอียดของการหาคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น โดยใช้การแปลงลาปลาซ เป็นดังนี้

$$s^2V(s) - sv(0) - v'(0) + 2\left[sV(s) - v(0)\right] + V(s) = \frac{1}{s}$$
$$s^2V(s) - s(1) - (-1) + 2\left[sV(s) - 1\right] + V(s) = \frac{1}{s}$$
$$s^2V(s) - s + 1 + 2sV(s) - 2 + V(s) = \frac{1}{s}$$
$$s^2V(s) + 2sV(s) + V(s) - s + 1 - 2 = \frac{1}{s}$$
$$V(s)\left(s^2 + 2s + 1\right) - s - 1 = \frac{1}{s}$$
$$V(s)\left(s^2 + 2s + 1\right) = \frac{1}{s} + s + 1$$
$$V(s)\left(s^2 + 2s + 1\right) = \frac{1}{s} + \frac{s^2}{s} + \frac{s}{s}$$
$$V(s)\left(s^2 + 2s + 1\right) = \frac{s^2 + s + 1}{s}$$
$$V(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s\left(s^2 + 2s + 1\right)}$$
$$V(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s\left(s + 1\right)^2}$$

เราจะแยกเศษส่วนย่อย ดังนี้

$$V(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}$$

เราจะคูณไขว้สมการข้างต้น

$$s^2+s+1=(s+1)^2A+(s)(s+1)B+sC$$

$$s^2+s+1=\left(s^2+2s+1\right)A+\left(s^2+s\right)B+sC$$

$$(1)s^2+(1)s+1=(A+B)s^2+(2A+B+C)s+A$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เราจะได้ว่า

$$A=1,\ B=0,\ C=-1$$

เราจึงแยกเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$V(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s}+\frac{-1}{(s+1)^2}$$

ผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซผกผันก็ทำได้โดยการสังเกตตารางที่ 7.1 และ 7.2

$$v(t)=u(t)-te^{-t}$$

ในหัวข้อสุดท้ายของบทที่ 7 นี้ เรากล่าวถึงการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการเชิงอนุพันธ์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าเท่านั้น การแปลงลาปลาซยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมแขนงอื่น รวมถึงงานประยุกต์ทางด้านฟิสิกส์ อีกด้วย

แบบทดสอบความเข้าใจ

ข้อความต่อไปนี้กล่าวถูกต้องหรือไม่ ?

1 นิยามของการแปลงลาปลาซ เกี่ยวของกับการหาปริพันธ์

2 การแปลงลาปลาซ จะเปลี่ยนฟังก์ชันของตัวแปร t ให้กลายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s

3 ตัวแปร s คือตัวแปรลาปลาซ และเป็นจำนวนเชิงซ้อน

4 บริเวณลู่เข้าของการแปลงลาปลาซ เกี่ยวข้องกับส่วนของจำนวนจริงของตัวแปร s

5 $f(t) \Leftrightarrow F(s)$ ถูกเรียกว่าคู่การแปลงลาปลาซ

6 สำหรับสัญญาณรายคาบ เราสามารถตัดสัญญาณเพียงคาบเดียวมาเพื่อหาผลการแปลงลาปลาซได้

7 การคอนโวลูชันในโดเมนเวลา มีค่าเท่ากับ ผลคูณธรรมดาในโดเมนความถี่

8 การแปลงลาปลาซผกผัน จะเปลี่ยนฟังก์ชันของตัวแปร s ให้กลายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร t

9 $L^{-1}\left[F(s)\right]$ คือการหาผลการแปลงลาปลาซ

10 $L\left[f(t)\right]$ คือการหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ข้อแนะนำ

หากท่านตอบว่า **ถูก** ควรตอบพร้อมเหตุผล แต่ หากท่านตอบว่า **ไม่ใช่** ควรต้องมีข้อขัดแย้ง

แบบฝึกทักษะ

7.1 นิยามของการแปลงลาปลาซ

1. จงหาผลการแปลงของสัญญาณต่อไปนี้ โดยใช้นิยาม

1.1 $f(t) = 3t - 2$

1.2 $f(t) = u(t) - u(t-1)$

1.3 $f(t) = \sin\left(440\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

1.4 $f(t) = (t+2)^2$

2. จงแสดงเหตุผลว่า ทำไม $f(t) = \dfrac{1}{t}$ จึงไม่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้

7.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

3. จงหาผลการแปลงของลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้ โดยใช้คู่การแปลงและคุณสมบัติ

3.1 $f(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$

3.2 $f(t) = t\left[u(t-1) - u(t-2)\right]$

3.3 $f(t) = t^2\left[e^{2t}\cos 2t\right]$

จงหาผลการแปลงของลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้ โดยใช้คู่การแปลงและคุณสมบัติ (ต่อ)

3.4 $f\left(t\right)=\dfrac{\sin t}{t}u\left(t\right)$

3.5 $f\left(t\right)=e^{-1-t}+2e^{-t-2}$

3.6 $f\left(t\right)=\left(t-1\right)u\left(t-5\right)$

3.7 $f\left(t\right)=\sin^{2}\left(2\pi t\right)$

3.8 $f\left(t\right)=\int_{0}^{t}\cos^{2} t\,dt$

3.9 $f\left(t\right)=\dfrac{d^{4}\left(te^{t}\right)}{dt^{4}}$

3.10 $f\left(t\right)=u\left(\dfrac{t}{4}\right)*\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$

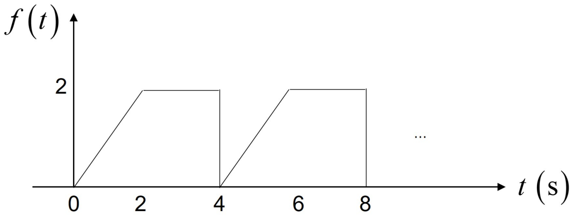
3.11 $f(t)=t\sin\left(t\right)+\int_{0}^{t}\sin\left(2t\right)$

3.12 $f\left(t\right)=u\left(2t+4\right)+\dfrac{d^{2}}{dt^{2}}\left[e^{\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot u\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

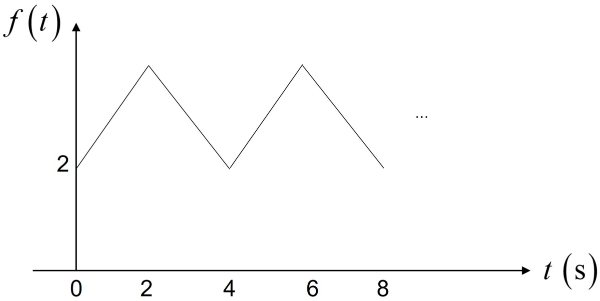
4. จงหาผลการแปลงของลาปลาซของสัญญาณต่อไปนี้ โดยใช้คู่การแปลงและคุณสมบัติ

$$f(t) = t^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 5u\left(\frac{t}{-2}\right),$$

5. จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณในรูปด้านล่าง



6. จงหาผลการแปลงลาปลาซของสัญญาณในรูปด้านล่าง



7.3 การแปลงลาปลาซผกผัน

7. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของสัญญาณต่อไปนี้

7.1 $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

7.2 $F(s) = \dfrac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$

7.3 $F(s)=\dfrac{s-1}{s(s+1)^3}$

7.4 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2-3s+2)(s^2+1)^2}$

7.5 $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s-1}$

7.6 $F(s)=\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}+\dfrac{2}{s(s^2+4)}$

7.4 การประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์

8. จงหาแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ