# บั้นที่ 9

# การแปลงฟูเรียร์

“ บทสุดท้ายได้จบลงไปแล้ว ทิ้งแสงสีแดงฉานอยู่บนขอบฟ้า
ผู้ที่อ่านแล้วสุข เห็นเป็นภาพอันสวยงามตระการตา
แต่ **ผู้ที่อ่านแล้วทุกข์**
กลับเห็นเป็นสัญลักษณ์ของชีวิตที่ใกล้จะลาลับ ”

**กิมย้ง** เกือบได้กล่าวเอาไว้
มังกรหยก ภาค วิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

# CHAPTER9

# การแปลงฟูเรียร์ Fourier Transform

**“ก้าวแรกพลาดไม่เป็นไร**
**ก้าวต่อไปคือบทสุดท้าย”**

**- วิลาสินี EE52 (aka ไม่รู้จักแก้ว), สามไม้เพราะอ่านแค่บทสุดท้าย**

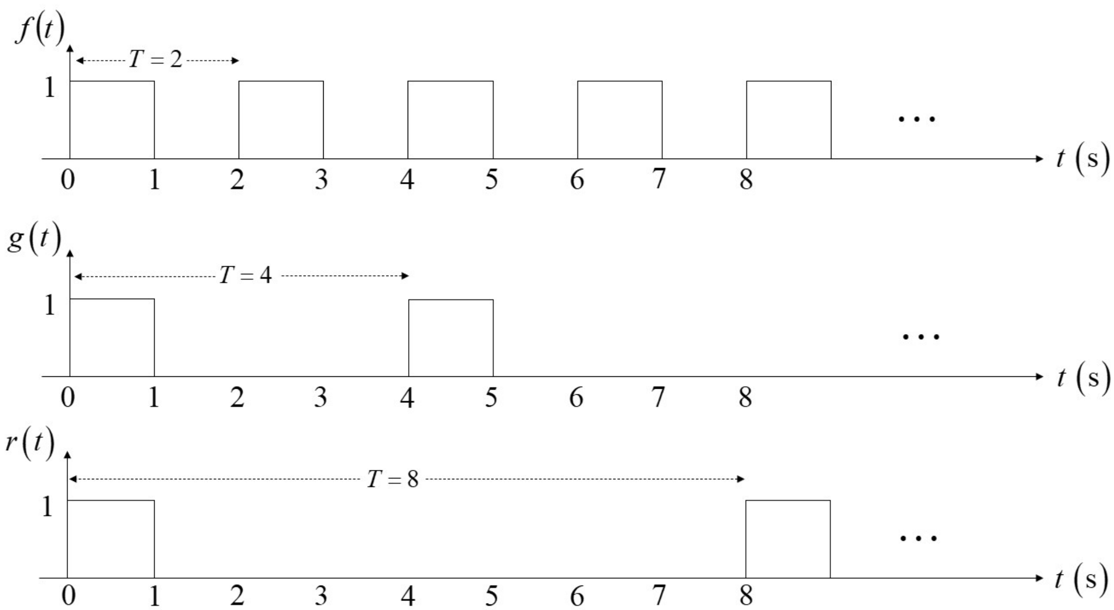
I never make the same mistake twice !

ตามที่ได้เกริ่นไว้ในบทนำของบทที่ 8 (หากสนใจในประเด็นอารัมภบท ท่านผู้อ่านสามารถย้อนกลับไปอ่านได้) สิ่งที่ทำให้ทฤษฎีการแพร่และการนำความร้อนในสสารของฟูเรียร์ เป็นที่ยอมรับในแวดวงวิชาการและทำให้ท่านมีชื่อเสียงมาจนถึงทุกวันนี้ ก็คือ **“การแปลงฟูเรียร์”** เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เราจะมาจาระไนกันในบทสุดท้ายนี้ หากยังพอจำกันได้ อนุกรมฟูเรียร์ที่เราพูดถึงกันในบทที่แล้วนั้น สามารถนำไปใช้วิเคราะห์องค์ประกอบทาง**ความถี่**ของสัญญาณได้ แต่สัญญาณดังกล่าวจะต้องมีลักษณะเป็นรายคาบเท่านั้น ถึงตรงนี้ผู้อ่านอาจจะพอเดาได้ว่า การแปลงฟูเรียร์ก็คือการต่อยอดและถือเป็นความสุดยอดระดับตำนาน การแปลงนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์องค์ประกอบทางความความถี่ของสัญญาณประเภทใดๆ ก็ได้ คำกล่าวนี้อาจดูเว่อร์เกินจริงไปหน่อย ถ้าจะกล่าวแบบซีเรียสจริงจัง สัญญาณที่จะถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยการแปลงฟูเรียร์ได้นั้นจะต้องผ่านเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์บางอย่าง ขอให้ผู้อ่านทึกทักเอาได้เลยว่าสัญญาณทุกสัญญาณที่จะปรากฏในบทสุดท้ายนี้ผ่านเงื่อนไขดังกล่าวเสมอ หากท่านผู้อ่านสนใจในประเด็นเงื่อนไข โปรดจงสืบค้นบนอินเตอร์เน็ตด้วยคำว่า convergence of Fourier integral สุดท้ายก่อนเข้าประเด็นเนื้อหา หลายๆท่านอาจจะสงสัยว่า เราวิเคราะห์ความถี่ไปทำไม ผู้เขียนขอพูดให้เห็นความสำคัญแบบจนๆ ว่า ประเทศไทยเราได้นำความถี่มาประมูลเพื่อสร้างรายได้เข้าประเทศ โดยมีมูลค่าระดับ ***แสนล้าน*** ! รวย รวย รวย (*สัญญาณทางไฟฟ้าที่ใช้ในระบบโทรคมนาคมคือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าประเภทหนึ่งซึ่งมีความถี่สูงมาก)\

## 9.1 นิยามของการแปลงฟูเรียร์ (Definition of Fourier Transform)

ณ จุดนี้ ผู้อ่านจะได้ทราบจากเนื้อหาที่กล่าวถึงในบทที่ 8 ไปแล้วว่า อนุกรมฟูเรียร์สามารถใช้ในการแสดงสัญญาณรายคาบให้อยู่ในรูปของผลบวกของสัญญาณไซนูซอยด์ได้ การแปลงฟูเรียร์จะต่อยอดหลักการของอนุกรมฟูเรียร์เพื่อวิเคราะห์สัญญาณที่ไม่เป็นรายคาบ โดยการพิจารณาว่าสัญญาณไม่เป็นรายคาบมีคาบเป็นอนันต์

**ตัวอย่างที่ 9.1-1** พิจารณาสัญญาณรายคาบ $f(t)$, $g(t)$ และ $r(t)$ ซึ่งมีคาบเท่ากับ 2, 4 และ 8 วินาที ตามลำดับ




ภาพที่ 9.1 สัญญาณสำหรับตัวอย่างที่ 9.1

จากสมการที่ 8.10 สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนของสัญญาณทั้งสามในภาพที่ 9.1 เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^1 (1)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_1^T (0)e^{-jn\omega_0 t}dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\left.\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{jn2\pi}\right)\left(1-e^{\frac{-jn2\pi}{T}}\right) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\
&= \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{\frac{-jn2\pi}{T}}\right)
\end{aligned}
$$

สำหรับสัญญาณ $f(t)$ ซึ่งมีคาบเท่ากับ 2 วินาที

$$c_n = \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{\frac{-jn2\pi}{2}}\right) \quad ; \; T=2$$

$$= \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{-jn\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos n\pi}{jn\pi}\right) \qquad ; \; e^{-jn\pi} = \cos n\pi$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{j2n\pi} \quad \cdots (\bullet)$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left(0 + j\left((-1)^n - 1\right)\right) \; ; \; (\bullet)\times\frac{j}{j}$$

สำหรับสัญญาณ $g(t)$ ซึ่งมีคาบยาวกว่าสัญญาณ $f(t)$ สองเท่า สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนมีค่าดังนี้

$$c_n = \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{\frac{-jn2\pi}{4}}\right) \quad ; \; T=4$$

$$= \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{-j\frac{n\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{jn\pi}\right)$$

$$= \frac{\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)+j\sin\frac{n\pi}{2}}{j2n\pi} \qquad \cdots (*)$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left(-\sin\frac{n\pi}{2}+j\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right) \quad ; \; *\times\frac{j}{j}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับสัญญาณ $r(t)$ ซึ่งมีคาบเท่ากับ 8 วินาที เราก็จะได้ว่า

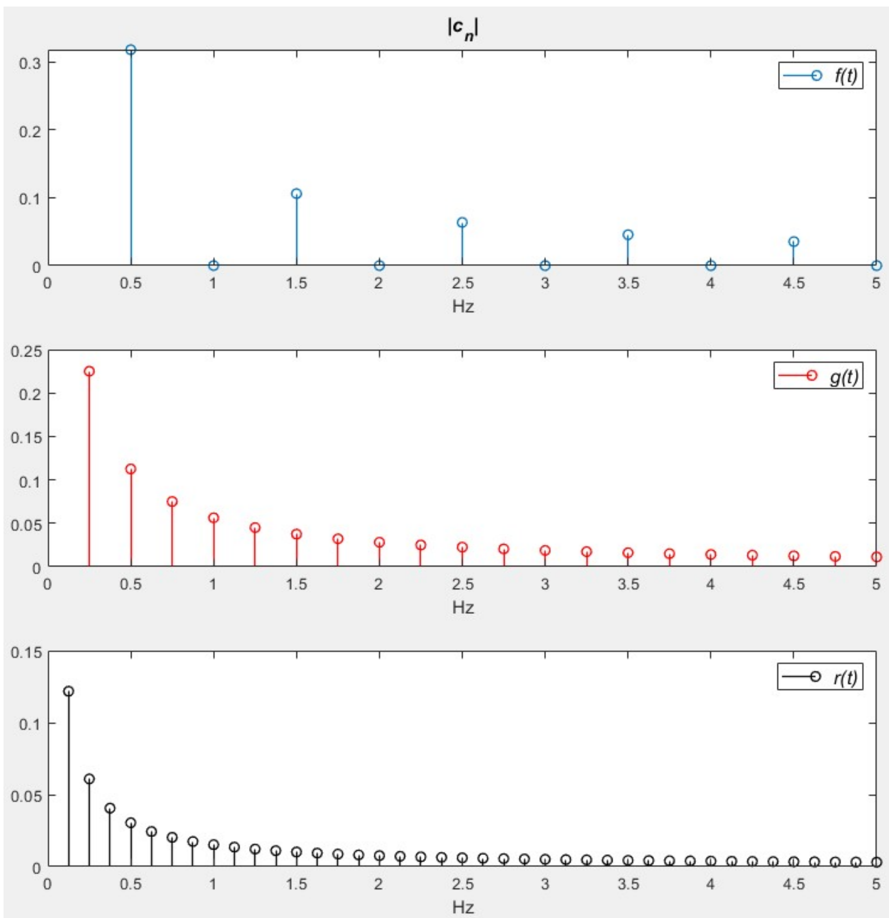
$$c_n = \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{\frac{-jn2\pi}{8}}\right) \quad ; \; T=8$$

$$= \frac{1}{jn2\pi}\left(1-e^{-j\frac{n\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{\left(1-\cos\frac{n\pi}{4}\right)+j\sin\frac{n\pi}{4}}{j2n\pi} \qquad \cdots (\odot)$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left(-\sin\frac{n\pi}{4}+j\left(1-\cos\frac{n\pi}{4}\right)\right) \quad ; \; \odot\times\frac{j}{j}$$

ภาพที่ 9.2 แสดงสเปกตรัมของแอมพลิจูดเชิงซ้อนของสัญญาณรายคาบ $f(t)$, $g(t)$ และ $r(t)$ (ผู้อ่านสามารถทบทวนวิธีวาดภาพร่างสเปกตรัมนี้ได้จากตัวอย่างที่ 8.3-9) โดยผู้เขียนเริ่มพล็อตค่าเพียงแค่ฝั่งบวกเท่านั้น $n = 1, 2, \ldots$ (หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ $f = n\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \ldots$) และผู้เขียนขอกล่าวอีกครั้งว่า ภาพสเปกตรัมทั้งสามภาพในรูปที่ 9.2 มีความไม่ต่อเนื่อง (discrete) จากภาพสเปกตรัมด้านล่าง เราจะสังเกตเห็นได้ว่า ยิ่งคาบมีค่าเพิ่มขึ้นมากเท่าใด (โปรดพิจารณาภาพที่ 9.1 ประกอบด้วย) แอมพลิจูดเชิงซ้อนสองค่าที่อยู่ติดกันนั้นจะมีระยะห่างในแกนความถี่น้อยลงเท่านั้น เราจึงกล่าวได้ว่า เมื่อคาบของสัญญาณรายคาบมีค่าเพิ่มขึ้น องค์ประกอบทางความถี่ หรือ ฮาร์โมนิคสองคู่ที่ติดกันจะอยู่ชิดกันมากขึ้น พฤติกรรมที่เกิดขึ้นนี้ก็มาจากข้อเท็จจริงที่ว่า ความถี่แปรผกผันกับคาบ




ภาพที่ 9.2 สเปกตรัมของแอมพลิจูดเชิงซ้อนสำหรับตัวอย่างที่ 9.1

หากพิจารณาภาพที่ 9.2 เรียบร้อยแล้ว ผู้อ่านโปรดจงจินตนาการถึงภาพสเปกตรัมของสัญญาณที่มีคาบลู่เข้าสู่อนันต์ $T \to \infty$ (คาบมีค่าเป็นอนันต์) ภาพสเปกตรัมนี้จะต้องประกอบไปด้วยสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ซึ่งอยู่ชิดกันจนแทบไม่มีระยะห่างในแกนความถี่ $\Delta f \to 0$ พฤติกรรมที่เกิดขึ้นนี้ ในทางคณิตศาสตร์ เราจะกล่าวได้ว่าสเปกตรัมของแอมพลิจูดเชิงซ้อนของสัญญาณที่มีคาบเป็นอนันต์มีความต่อเนื่อง (continuous) และสัญญาณที่มีคาบเป็นอนันต์ก็คือสัญญาณที่ไม่เป็นรายคาบ

เพื่อจะให้กระจ่างแจ้งอย่างแท้จริง ในเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณรายคาบและการต่อยอดไปสู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไม่เป็นรายคาบ เราจะเริ่มต้นด้วยการเขียนสัญญาณรายคาบใดๆ (ขอแทนด้วย $f(t)$) ที่มีคาบเท่ากับ $T$ โดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน ดังนี้

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad ;\text{ จาก } (8.9)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \qquad ;\text{ จาก } (8.10)$$

โดยที่ $\omega_0$ คือความถี่มูลฐานของสัญญาณรายคาบ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

เมื่อพิจารณาสเปกตรัมของสัญญาณ ระยะห่างของความถี่ฮาร์โมนิคที่อยู่ติดกัน คือ

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= (n+1)\omega_0 - (n)\omega_0 \\ &= \omega_0 \\ &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

จากข้อมูลข้างต้น เราก็จะเขียนได้อีกว่า

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อนก็จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{\Delta\omega}{2\pi} \right) \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} (\Delta\omega) \qquad (9.1)$$

ด้วยความรู้ทางแคลคูลัส หากเราพิจารณา $T \to \infty$ เราก็จะได้ว่า

สัญญาณรายคาบ $f(t)$ ก็จะกลายเป็นสัญญาณไม่เป็นรายคาบ

$\Delta\omega \to d\omega$

(ระยะห่างของฮาร์โมนิคมีค่าน้อยมาก จนสามารถแสดงในเชิงอนุพันธ์ได้)

$n\omega_0 \to \omega$

(ความถี่ฮาร์โมนิคที่เคยเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง อยู่ชิดกันมากจนมีความต่อเนื่อง)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

(ผลรวมอนันต์ กลายเป็น การหาปริพันธ์)

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อนในสมการที่ 9.1 ก็จะกลายเป็น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega \qquad ; \; T \to \infty \tag{9.2}$$

พจน์ที่อยู่ข้างในวงเล็บของสมการข้างต้น
ซึ่งก็คือ การหาปริพันธ์ของผลคูณระหว่าง $f(t)$ กับ $e^{-j\omega t}$
จะถูกนิยามในจักรวาลการแปลงว่าเป็น ***การแปลงฟูเรียร์***
ผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงฟูเรียร์จะเป็นฟังก์ชันหรือสัญญาณที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร $\omega$ เท่านั้น
เราจึงเขียนอ้างถึงสมการของผลลัพธ์ของการแปลงข้างต้นโดยใช้สัญลักษณ์ ดังนี้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

เมื่อ $F(\omega)$ คือ ผลการแปลงฟูเรียร์ (ฟังก์ชันหรือสัญญาณในโดเมนความถี่)

# ถ้า

สัญญาณ $f(t)$ คือสัญญาณไม่เป็นรายคาบ

การแปลงฟูเรียร์สามารถกระทำได้ผ่านปริพันธ์ดังนี้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{9.3}$$

โดยที่ $F(\omega)$ คือผลลัพธ์ของการแปลงฟูเรียร์

และการแปลงนี้เป็นการแปลงสัญญาณจากโดเมนเวลาให้กลายเป็น***สัญญาณในโดเมนความถี่***

---

จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์ตามที่สมการที่ 9.3 สมการที่ 9.2 จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F(\omega) \right) e^{j\omega t} d\omega$$

จากสมการข้างต้น เราสามารถอธิบายได้ว่า

สัญญาณไม่เป็นรายคาบ $f(t)$ สามารถหาได้จาก

การคูณค่าคงที่ $\frac{1}{2\pi}$ เข้ากับผลลัพธ์ของการหาปริพันธ์ระหว่างผลคูณ $F(\omega)$ กับ $e^{j\omega t}$

อีกนัยหนึ่ง เราก็สามารถกล่าวได้ว่า

$F(\omega)$ สามารถถูกแปลงกลับให้มาเป็น $f(t)$ โดยการ

การคูณค่าคงที่ $\frac{1}{2\pi}$ เข้ากับผลลัพธ์ของการหาปริพันธ์ระหว่างผลคูณ $F(\omega)$ กับ $e^{j\omega t}$

# ถ้า

สัญญาณ $F(\omega)$ คือสัญญาณในโดเมนความถี่

เราสามารถแปลงสัญญาณข้างต้นให้กลับมาเป็นสัญญาณในโดเมนเวลา $f(t)$ ได้ดังนี้

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \tag{9.4}$$

การแปลงกลับนี้ถูกเรียกว่า ***การแปลงฟูเรียร์ผกผัน*** (inverse Fourier transform)

---

ก่อนจบหัวข้อแรกนี้ไป ผู้เขียนขอสรุปประเด็นต่างๆสำหรับการแปลงฟูเรียร์ไว้ดังนี้ :

1. $F(\omega)$ คือ สัญญาณในโดเมนความถี่
2. $F(\omega)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแปลงฟูเรียร์
3. $f(t)$ คือ สัญญาณในโดเมนเวลา
4. $f(t)$ คือ สัญญาณไม่เป็นรายคาบ
5. เราสามารถแปลง $f(t)$ ให้กลายเป็น $F(\omega)$ ด้วยการแปลงฟูเรียร์ โดยใช้สมการที่ 9.3

   เรายังนิยมกำหนดให้ $\mathrm{F}[f(t)] = F(\omega)$ ซึ่งหมายถึง จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \mathrm{F}[f(t)]$$

6. เราสามารถแปลง $F(\omega)$ ให้กลายเป็น $f(t)$ ด้วยการแปลงฟูเรียร์ผกผัน โดยใช้สมการที่ 9.4

   $\mathrm{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$ จะหมายถึง จงหาการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $F(\omega)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$
$$= \mathrm{F}^{-1}[F(\omega)]$$

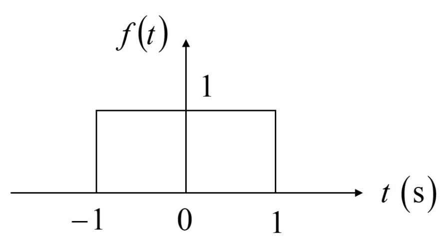
7. การแปลงฟูเรียร์จะแปลงสัญญาณในโดเมนเวลาให้กลายเป็นสัญญาณในโดเมนความถี่
8. การแปลงฟูเรียร์ผกผันจะแปลงสัญญาณในโดเมนความถี่ให้กลายเป็นสัญญาณในโดเมนเวลา
9. คู่การแปลงฟูเรียร์ถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

เนื่องด้วยการแปลงฟูเรียร์และการแปลงฟูเรียร์ผกผันเกี่ยวข้องกับการหาปริพันธ์ การแปลงเหล่านี้จึงถูกเรียกว่าเป็นการแปลงเชิงปริพันธ์ (integral transform) เฉกเช่นเดียวกันกับการแปลงลาปลาซที่กล่าวถึงในบทที่ 7

## 9.2 การแปลงฟูเรียร์เชิงปริพันธ์ (Integral Fourier Transform)

หลังจากที่เราได้ทราบเกี่ยวกับนิยามของการแปลงฟูเรียร์ไปให้หัวข้อที่แล้ว หัวข้อนี้เราจะมาเรียนรู้วิธีการแปลงฟูเรียร์และการแปลงฟูเรียร์ผกผันผ่านตัวอย่าง เราจะเรียกการแปลงฟูเรียร์ในหัวข้อนี้ว่าการแปลงฟูเรียร์โดยใช้นิยาม เพราะเราใช้นิยาม 9.3 และ 9.4 ในการหาผลลัพธ์การแปลง ดังที่ได้เคยกล่าวไปว่า การแปลงฟูเรียร์เกี่ยวข้องกับการหาปริพันธ์ ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์โดยใช้นิยามสำหรับหัวข้อนี้ก็จะถูกอ้างถึงในชื่อการแปลงฟูเรียร์เชิงปริพันธ์ เพื่อที่จะแยกให้ชัดเจนกับการแปลงฟูเรียร์โดยใช้ตารางและคุณสมบัติ ซึ่งถือว่าเป็นเรื่องสำคัญ และจะได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

**ตัวอย่างที่ 9.2-1** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไม่เป็นรายคาบดังปรากฏในภาพที่ 9.2 ในทางวิศวกรรมไฟฟ้า สัญญาณดังกล่าวมักจะถูกเรียกว่า สัญญาณพัลส์สี่เหลี่ยม (rectangular pulse)




ภาพที่ 9.3 สัญญาณพัลส์สี่เหลี่ยม สำหรับตัวอย่างที่ 9.2-1

จากภาพข้างต้น ฟังก์ชันที่ใช้ในการอธิบายสัญญาณดังกล่าวก็คือ

$$f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\tau = 2$ คือความกว้างของพัลส์ จากนิยามในสมการที่ 9.3 การแปลงฟูเรียร์มีวิธีทำดังนี้

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} 0\cdot e^{-j\omega t}dt$$
$$=\left(\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega(1)}-\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega(-1)}$$
$$=\frac{e^{j\omega}-\cdot e^{-j\omega}}{j\omega}$$

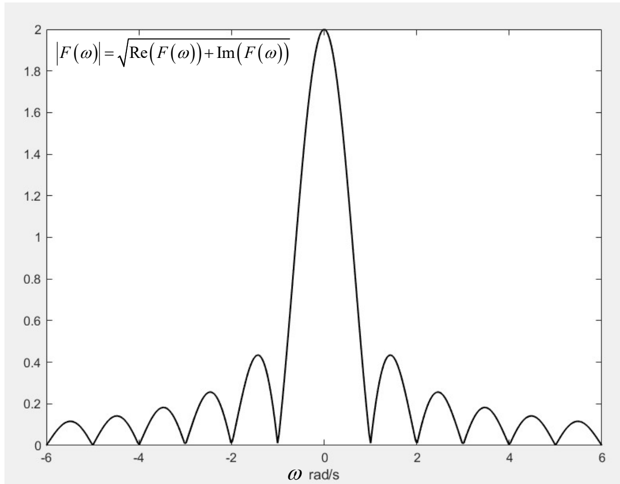
เราจะจัดรูปผลลัพธ์การแปลงที่ได้ โดยให้การคูณ $\frac{2}{2}$ ซึ่งจะทำให้เราได้เป็น

$$F(\omega)=\frac{e^{j\omega}-\cdot e^{-j\omega}}{j\omega}\cdot\frac{2}{2}$$
$$=\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\left(\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{j}\right)$$
$$=\frac{2}{\omega}\cdot\left(\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right)$$

จากเอกลักษณ์ของออยเลอร์ เราจึงได้ว่า

$$F(\omega)=\frac{e^{j\omega}-\cdot e^{-j\omega}}{j\omega}\cdot\frac{2}{2}$$
$$=\frac{2}{\omega}\cdot\left(\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right)$$
$$=2\cdot\frac{(\sin\omega)}{\omega}$$
$$=2\cdot\operatorname{sinc}(\omega)$$

เมื่อ $\operatorname{sinc}(x)=\sin x/x$ สเปกตรัมของแอมพลิจูดของสัญญาณในข้อนี้แสดงด้วยภาพที่ 9.4 และมันสื่อได้ชัดเจนว่า สัญญาณในโดเมนความถี่มีความต่อเนื่อง (อย่างที่ได้เคยเกริ่นนำไว้ในหัวข้อที่9.1)




ภาพที่ 9.4 สเปกตรัมของแอมพลิจูดสำหรับตัวอย่างที่ 9.2-1

**ตัวอย่างที่ 9.2-2** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของสัญญาณ $F(\omega) = 2 \cdot \mathrm{sinc}(\omega)$

เราจะใช้นิยามของการแปลงฟูเรียร์ผกผันตามสมการ 9.4 ดังนี้

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot \mathrm{sinc}(\omega)\cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\cos(\omega t)\, d\omega + j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\, d\omega\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(a(t) + jb(t)\right) \end{aligned}$$

หากพิจารณาเฉพาะพจน์ $b(t)$ เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
b(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega-\omega t)-\cos(\omega+\omega t)}{2\omega}\,d\omega \quad ;\ \sin(a)\sin(b) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\sin(a+b)\big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\big((1-t)\omega\big)}{2\omega}\,d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\big((1+t)\omega\big)}{2\omega}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\big((1-t)\omega\big)}{\omega}\,d\omega - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\big((1+t)\omega\big)}{\omega}\,d\omega \\
&= 0 \qquad ;\ \text{Cauchy principal value}
\end{aligned}
$$

ลำดับถัดไปเราจะพิจารณาพจน์ $a(t)$ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot\cos(\omega t)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega-\omega t)+\sin(\omega+\omega t)}{2\omega}\,d\omega \quad ;\ \sin(a)\cos(b) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2}\big(\sin(a-b)+\sin(a+b)\big) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\big((1-t)\omega\big)}{\omega}\,d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\big((1+t)\omega\big)}{\omega}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2}\big(\pi\,\mathrm{sgn}(1-t)\big)+\frac{1}{2}\big(\pi\,\mathrm{sgn}(1+t)\big) \quad ;\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{x}\,dx = \pi\,\mathrm{sgn}(k) \\
&= \frac{\pi}{2}\big(\mathrm{sgn}(1+t)+\mathrm{sgn}(1-t)\big)
\end{aligned}
$$

กลับไปพิจารณาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผัน $a(t)$ ที่ค้างไว้ตั้งแต่ตอนต้น เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi}\big(a(t)+jb(t)\big) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}\big(\mathrm{sgn}(1+t)+\mathrm{sgn}(1-t)\big)}_{a(t)} + j\underbrace{(0)}_{b(t)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{sgn}(1+t)+\mathrm{sgn}(1-t)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

อ้างอิงจากนิยามของสัญญาณพัลส์สี่เหลี่ยมในรูปฟังก์ชันซิกนัม

$$
f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sgn}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)+\mathrm{sgn}\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\right)
$$

เราก็จะได้ว่า

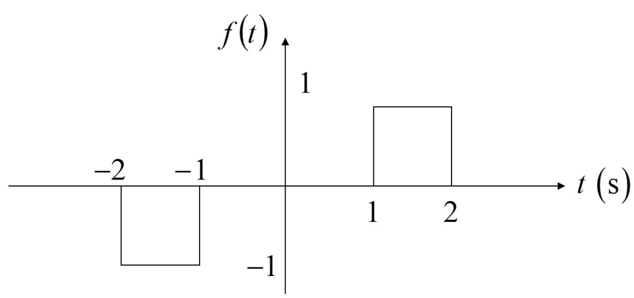
$$f(t)=\frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{sgn}(1+t)+\operatorname{sgn}(1-t)\right)\right)$$
$$=\begin{cases}0, & t<-1\\ 1, & -1\le t\le 1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

ดังนั้นการหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันจึงสามารถสรุปได้ว่า

$$f(t)=\mathrm{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$$
$$=\mathrm{F}^{-1}\left[2\cdot\operatorname{sinc}(\omega)\right]$$
$$=\begin{cases}0, & t<-1\\ 1, & -1\le t\le 1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

สำหรับตัวอย่างในข้อนี้ ผู้เขียนพยายามจะแสดงให้เห็นว่า สัญญาณในโดเมนความถี่ที่ได้จากการแปลงฟูเรียร์ในตัวอย่างที่ 9.2-1 เมื่อนำไปผ่านกระบวนการแปลงฟูเรียร์ผกผัน ผลลัพธ์สุดท้ายก็จะต้องได้สัญญาณในโดเมนเวลา (โจทย์ตั้งต้น) แต่ ! อย่างที่ผู้อ่านได้เห็นเองกับตาว่า มันค่อนข้างยุ่งยาก นามธรรม และน่าเบื่อ การแปลงฟูเรียร์ผกผันจึงนิยมใช้คุณสมบัติและคู่การแปลงที่จะกล่าวถึงในลำดับถัดไป อดใจรอสักประเดี๋ยว

**ตัวอย่างที่ 9.2-3** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไม่เป็นรายคาบต่อไปนี้




ภาพที่ 9.5 สัญญาณ สำหรับตัวอย่างที่ 9.2-3

เราจะเขียนฟังก์ชันของสัญญาณข้างต้นได้ดังนี้

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-2\\ -1, & -2\le t\le -1\\ 0, & -1<t<1\\ 1, & 1\le t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$$

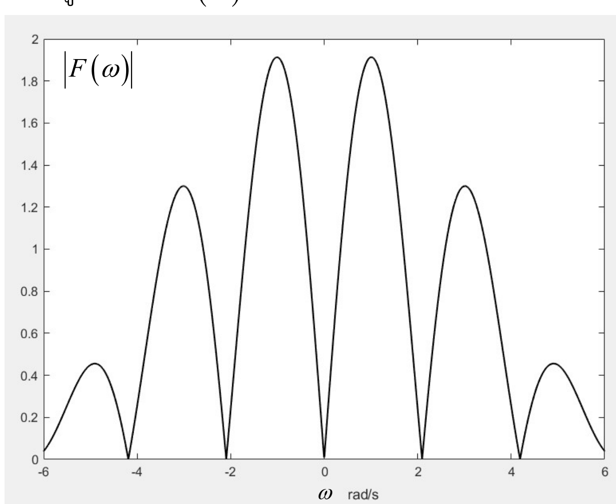
การแปลงฟูเรียร์มีรายละเอียดดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t} \\
&= \int_{-2}^{-1} (-1)\cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2} (1)\cdot e^{-j\omega t}dt \\
&= \left( \left. \frac{-e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-2}^{-1} \right) + \left( \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{1}^{2} \right) \\
&= \left( \frac{e^{-j\omega(-1)}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega(-2)}}{j\omega} \right) + \left( -\frac{e^{-j\omega(2)}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega(1)}}{j\omega} \right) \\
&= \left( \frac{e^{j\omega}}{j\omega} - \frac{e^{j2\omega}}{j\omega} \right) + \left( -\frac{e^{-j2\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} \right) \\
&= \left( \frac{e^{j\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} \right) - \left( \frac{e^{j2\omega}}{j\omega} + \frac{e^{-j2\omega}}{j\omega} \right) \\
&= \frac{2}{j\omega}\left( \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2} \right) - \frac{2}{j\omega}\left( \frac{e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}}{2} \right) \\
&= \frac{2}{j\omega}(\cos\omega - \cos 2\omega) \\
&= -2j\left( \frac{\cos\omega}{\omega} - 2\frac{\cos 2\omega}{2\omega} \right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สุดท้ายเราจึงได้ว่า

$$
F(\omega) = \mathrm{F}\left[ f(t) \right] = j\left( 4\frac{\cos 2\omega}{2\omega} - 2\frac{\cos\omega}{\omega} \right)
$$

สเปกตรัมของแอมพลิจูดสำหรับ $F(\omega)$ แสดงด้วยภาพที่ 9.6




ภาพที่ 9.6 สเปกตรัมของแอมพลิจูดสำหรับตัวอย่างที่ 9.2-3

**ตัวอย่างที่ 9.2-4** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $\delta(t)$

ตัวอย่างนี้ต้องใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วยที่ว่า

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$$

วิธีทำเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathrm{F}\left[\delta(t)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-0) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= e^{-j\omega(0)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

คู่การแปลงฟูเรียร์ของ $\delta(t)$ จึงเขียนได้เป็น

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-5** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเอ็กโพเนนเชียลเชิงซ้อน $e^{j\omega_0 t}$

สำหรับสัญญาณในตัวอย่างนี้ ถ้าเราหาผลการแปลงจากนิยามตรงๆ จะค่อนข้างยาก เราจึงใช้วิธีคิดในลักษณะสังเกตคำตอบดังนี้

กำหนดสัญญาณในโดเมนความถี่ (กำหนดขึ้นมาดื้อๆ)

$$F(\omega) = 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0)$$

และจากคุณสมบัติของฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (คล้ายๆตัวอย่างที่แล้ว)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0)\, f(\omega)\, d\omega = f(\omega_0)$$

ลำดับถัดไปพิจารณาการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\underbrace{e^{j\omega t}}_{f(\omega)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0)t} \quad ; \; f(\omega_0) \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

ดังนั้น คู่การแปลงฟูเรียร์ของ $e^{j\omega_0 t}$ จึงเขียนได้เป็น

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\,\delta\left(\omega-\omega_0\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-6** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไฟฟ้ากระแสตรงหรือฟังก์ชันค่าคงที่ $A \in \mathbb{R}$

เราจะใช้เทคนิคคล้ายๆกับตัวอย่างที่แล้ว โดยกำหนดสัญญาณในโดเมนความถี่ขึ้นมาดังนี้

$$F\left(\omega\right) = 2\pi A\ \delta\left(\omega\right)$$

ใช้การแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\omega\right)\, e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\, A\delta\left(\omega\right)\, e^{j\omega t} d\omega \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega-0\right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= A\left(e^{j(0)t}\right) \\ &= A \end{aligned}$$

ดังนั้น คู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไฟฟ้ากระแสตรงจึงเขียนได้เป็น

$$A \Leftrightarrow 2\pi A\ \delta\left(\omega\right)$$

ยกตัวอย่างเช่น

$$10 \Leftrightarrow 20\pi\,\delta\left(\omega\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-7** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = \cos(\omega_0 t)$

จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\omega_0 t\right) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\omega t}\, dt\right) + \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t}\, dt\right) \end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 9.2-5 เราจะได้ว่า

$$\mathrm{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$$

ดังนั้นผลการแปลงข้างต้นจึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2}2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\frac{1}{2}2\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right) \\ &= \pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right) \\ &= \pi\left(\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right) \end{aligned}$$

คู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณโคไซน์จึงเขียนได้เป็น

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi\left(\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-8** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $F(\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์ผกผัน และคุณสมบัติของฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย วิธีทำเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)\cdot e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}d\omega\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j(-\omega_0)t}+e^{-j(\omega_0)t}\right) \\ &= \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-9** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = \sin(\omega_0 t)$

จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\omega_0 t\right) e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \left(\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t}\, dt\right) + \left(\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t}\, dt\right) \\
&= \frac{1}{2j} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right) + \frac{1}{2j} 2\pi\delta\left(\omega + \omega_0\right) \\
&= \frac{\pi}{j}\delta\left(\omega - \omega_0\right) - \frac{\pi}{j}\delta\left(\omega + \omega_0\right) \\
&= j\pi\left(\delta\left(\omega + \omega_0\right) - \delta\left(\omega - \omega_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

คู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไซน์จึงเขียนได้เป็น

$$
\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow j\pi\left(\delta\left(\omega + \omega_0\right) - \delta\left(\omega - \omega_0\right)\right)
$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-10** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = \mathrm{sgn}(t)$

วิธีทำเริ่มต้นโดยการพิจารณาฟังก์ชันเอกโพเนนเชียลต่อไปนี้

$$
g\left(t\right) = \begin{cases} -e^{\alpha t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}
$$

โดยฟังก์ชันข้างต้นมีความสัมพันธ์เชิงแคลคูลัสกับฟังก์ชันเครื่องหมาย ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} g\left(t\right) &= \begin{cases} -e^{(0)t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ e^{-(0)t} & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases} \\
&= \mathrm{sgn}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์

$$
G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt
$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{\alpha t}\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t}\, dt$$

$$= \left( -\frac{1}{(\alpha - j\omega)} e^{(\alpha - j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{0} \right) + \left( \frac{1}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= -\frac{1}{(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{(\alpha + j\omega)}$$

จากความสัมพันธ์ที่กล่าวไว้ข้างต้น เราก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathrm{F}[f(t)] \\ &= \mathrm{F}[\mathrm{sgn}(t)] \\ &= \mathrm{F}\left[\lim_{\alpha \to 0} g(t)\right] \\ &= \lim_{\alpha \to 0}\left(\mathrm{F}[g(t)]\right) \\ &= \lim_{\alpha \to 0} G(\omega) \\ &= \lim_{\alpha \to 0}\left( -\frac{1}{(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{(\alpha + j\omega)} \right) \\ &= -\frac{1}{0 - j\omega} + \frac{1}{0 + j\omega} \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

คู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไซน์จึงเขียนได้เป็น

$$\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

**ตัวอย่างที่ 9.2-10** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย $f(t) = u(t)$

เฉกเช่นกับบางตัวอย่างที่ผ่านมา การแปลงฟูเรียร์จากนิยามตรงๆ จะทำได้ค่อนข้างลำบาก วิธีคิดสำหรับตัวอย่างนี้ เริ่มต้นจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเครื่องหมายกับฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย ดังนี้

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cdot e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right)e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t)e^{-j\omega t}\, dt
\end{aligned}
$$

อินทิกรัลพจน์แรกก็คือการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันค่าคงที่ (ตัวอย่างที่ 9.2-6)
ส่วนพจน์ที่สองคือการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันเครื่องหมาย (ตัวอย่างที่ 9.2-10)
ดังนั้นเราจึงเขียนบรรทัดสุดท้ายของการแปลงข้างต้น ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \left(2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\delta(\omega)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{j\omega}\right)\right) \\
&= \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}
\end{aligned}
$$

คู่การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วยจึงเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}
$$

ณ จุดนี้ ผู้เขียนหวังว่า ผู้อ่านน่าจะพอเข้าใจและทราบถึงวิธีการแปลงฟูเรียร์และการแปลงฟูเรียร์ผกผันโดยการใช้นิยามบ้างแล้ว ผู้อ่านอาจจะสังเกตได้ว่า ตัวอย่างในลำดับท้ายๆก็มักที่จะใช้ข้อมูลการแปลงที่ได้จากตัวอย่างก่อนหน้า และการแปลงด้วยนิยามตรงๆ นั้น เพียงแค่มองก็รู้สึกเหนื่อยแล้ว เราจึงรวบรวมคู่การแปลงที่มักจะเจอบ่อยๆในทางวิศวกรรมไฟฟ้าไว้ในตารางที่ 9.1 หากผู้อ่านพบเจอฟังก์ชันหรือสัญญาณต่อไปนี้ ท่านผู้อ่านก็สามารถหาผลการแปลงได้อย่างรวดเร็ว (โดยไม่ต้องไปหาปริพันธ์ให้มันยุ่งวุ่นวาย)

ตารางที่ 9.1 คู่การแปลงฟูเรียร์ที่สำคัญในทางวิศวกรรมไฟฟ้า

| | $f(t)$ | $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$ |
|---|---|---|
| 1) | $\delta(t)$ | $1$ |
| 2) | $u(t)$ | $\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ |

ตารางที่ 9.1 คู่การแปลงฟูเรียร์ที่สำคัญในทางวิศวกรรมไฟฟ้า (ต่อ)

| | $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|---|---|---|
| 3) | $A \in \mathbb{R}$ | $2\pi A\delta(\omega)$ |
| 4) | $u(t+\tau)-u(t-\tau)$ | $2\frac{\sin\omega\tau}{\omega}$ |
| 5) | $\|t\|$ | $\frac{-2}{\omega^2}$ |
| 6) | $\operatorname{sgn}(t)$ | $\frac{2}{j\omega}$ |
| 7) | $e^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{a+j\omega}$ |
| 8) | $t^n e^{-at}u(t)$ | $\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$ |
| 9) | $e^{-a\|t\|}$ | $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$ |
| 10) | $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ |
| 11) | $\sin\omega_0 t$ | $j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$ |
| 12) | $\cos\omega_0 t$ | $\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ |
| 13) | $e^{-at}\sin\omega_0 t u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$ |
| 14) | $e^{-at}\cos\omega_0 t u(t)$ | $\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$ |

## 9.3 คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์ (Properties of Fourier Transform)

สำหรับหัวข้อที่พึ่งผ่านพ้นไป ผู้เขียนตั้งใจจะสาธยายถึงขั้นตอนการหาผลลัพธ์การแปลงโดยละเอียด และจงใจชี้นำว่าการใช้นิยามในการหาผลการแปลงฟูเรียร์เป็นเรื่องค่อนข้างยุ่งยาก หัวข้อที่ 9.3 นี้ ผู้เขียนจะพยายามชี้นำว่าการแปลงฟูเรียร์โดยการใช้คุณสมบัติ (ไม่ต้องใช้นิยาม ไม่มีการหาปริพันธ์) เป็นเรื่องที่ทุกคนที่อ่านตำราเล่มนี้ทำได้ และสามารถทำได้ไม่ยากนัก คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์ที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไปนี้จะช่วยให้การแปลงฟูเรียร์สำหรับสัญญาณที่มีความสลับซับซ้อน นั้นทำได้ง่ายขึ้น

คุณสมบัติสำคัญของการแปลงฟูเรียร์ถูกสรุปไว้ในตารางที่ 9.2 ผู้เขียนได้ใช้หมายเลขแปะป้ายกำกับไว้ทั้งคู่การแปลงฟูเรียร์และคุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์ (ดังปรากฏในตารางที่ 9.1 และ 9.2 ตามลำดับ) เพื่อให้การอธิบายนั้นมีความกระชับ ผู้เขียนไม่ได้ลงรายละเอียดทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับที่มาที่ไปของแต่ละคุณสมบัติมากนัก แต่จะขอเน้นไปยังตัวอย่างการประยุกต์ใช้คุณสมบัติต่างๆ (หัวข้อนี้มีความคล้ายกับหัวข้อที่ 7.2 เรื่องคุณสมบัติการแปลงลาปลาซ)

ตารางที่ 9.2 คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์

| คุณสมบัติ | สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ |
|---|---|---|
| 1) Linearity | $a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$ | $a_1 F_1(\omega)+a_2 F_2(\omega)$ |
| 2) Scaling | $f(at)$ | $\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ |
| 3) Time shift | $f(t-a)$ | $e^{-j\omega a}F(\omega)$ |
| 4) Frequency shift | $e^{j\omega_0 t}f(t)$ | $F(\omega-\omega_0)$ |
| 5) Modulation | $\cos(\omega_0 t)f(t)$ | $\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$ |
| 6) Time differentiation | $\frac{d^n f}{dt^n}$ | $(j\omega)^n F(\omega)$ |
| 7) Time integration | $\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$ | $\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$ |
| 8) Frequency differentiation | $t^n f(t)$ | $(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$ |
| 9) Duality | $F(t)$ | $2\pi f(-\omega)$ |
| 10) Convolution in $t$ | $f_1(t)*f_2(t)$ | $F_1(\omega)F_2(\omega)$ |
| 11) Convolution in $\omega$ | $f_1(t)f_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$ |

**ตัวอย่างที่ 9.3-1** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $f(t)=2u(t)-3\cos(2\pi t)$
(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 1) Linearity**)

ผู้เขียนพยายามที่จะอธิบายเป็นลำดับขั้น โดยขั้นตอนการแปลงสำหรับตัวอย่างนี้ เป็นดังนี้

$$\underbrace{u(t)}_{f_1(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}}_{F_1(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 2)

$$2u(t) \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{j\omega}$$ *คุณสมบัติที่ 1)

$$\underbrace{\cos(2\pi t)}_{f_2(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\pi[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)]}_{F_2(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 12)

$$3\cos(2\pi t) \Leftrightarrow 3\pi[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)]$$ *คุณสมบัติที่ 1)

เราจึงเขียนได้ว่า

$$\underbrace{2u(t)-3\cos(2\pi t)}_{f(t)=2f_1(t)-3f_2(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\left(2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{j\omega}\right)-\left(3\pi[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)]\right)}_{F(\omega)=2F_1(\omega)-3F_2(\omega)}$$

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์สำหรับตัวอย่างนี้จึงสรุปได้เป็น

$$F(\omega) = \mathrm{F}\left[f(t)\right] = \mathrm{F}\left[2u(t)-3\cos(2\pi t)\right]$$

$$= \left(2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{j\omega}\right)-\left(3\pi[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)]\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-2** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $\mathrm{sgn}(3t)$
(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 2) Scaling**)

วิธีทำเป็นดังนี้

$$\underbrace{\mathrm{sgn}(t)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{j\omega}}_{F(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 6)

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{sgn}(3t)\right] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$ *คุณสมบัติที่ 2)

$$= \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|3|}F\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left.\frac{2}{j\omega}\right|_{\frac{\omega}{3}\to\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{j\left(\frac{\omega}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{2}{j\omega}$$

ดังนั้นเราจึงได้ผลการแปลงฟูเรียร์สำหรับตัวอย่างนี้เป็น

$$F(\omega) = \mathrm{F}\left[\operatorname{sgn}(3t)\right] = \frac{2}{j\omega}$$

หากเขียนให้อยู่ในรูปคู่การแปลงฟูเรียร์ เราก็จะได้เป็น

$$\operatorname{sgn}(3t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-3** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $e^{-5|t-1|}$
(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 3) Time shift**)

วิธีทำเป็นดังนี้

$$\underbrace{e^{-5|t|}}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2(5)}{5^2+\omega^2}}_{F(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 6)

$$\mathrm{F}\left[e^{-5|t-1|}\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$ *คุณสมบัติที่ 3)

$$= e^{-j\omega(1)}\left(\frac{2(5)}{5^2+\omega^2}\right)$$

$$= \frac{10e^{-j\omega}}{25+\omega^2}$$

ดังนั้นเราจึงได้คู่การแปลงฟูเรียร์เป็น

$$e^{-5|t-1|} \Leftrightarrow \frac{10e^{-j\omega}}{25+\omega^2}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-4** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $u(t)e^{j2t}$
(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 4) Frequency shift**)

วิธีทำก็จะเริ่มจากการพิจารณาคู่การแปลงที่ของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย

$$\underbrace{u(t)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}_{F(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 2)

$$\mathrm{F}\left[u(t)e^{j2t}\right] = \mathrm{F}\left[e^{j2t}u(t)\right] = F(\omega-\omega_0) \quad ,\omega_0 = 2$$ *คุณสมบัติที่ 4)

$$= \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)\Bigg|_{(\omega-1)\to\omega}$$

$$= \pi\delta\left(\omega-1\right)+\left(\frac{1}{j\left(\omega-1\right)}\right)$$

คู่การแปลงสำหรับตัวอย่างนี้ จึงเขียนได้เป็น

$$u\left(t\right)e^{j2t} \Leftrightarrow \pi\delta\left(\omega-1\right)+\left(\frac{1}{j\omega-1}\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-5** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $\cos(2\pi 100\cdot 10^{6}t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$

(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 5) Modulation**)

วิธีหาผลการแปลงสำหรับตัวอย่างนี้เป็นดังนี้

$$\underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{2\mathrm{sinc}\left(\omega\right)}_{F(\omega)}$$ *จากตัวอย่างที่ 9.2-1

โจทย์ให้นำสัญญาณในโดเมนเวลาข้างต้น $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ ไปคูณกับ $\cos(2\pi 100\cdot 10^{6}t)$

ซึ่งเมื่อมองดูที่ตารางคุณสมบัติแล้ว เราจะพบว่า โจทย์สอดคล้องกับคุณสมบัติที่ 5)

การใช้คุณสมบัติดังกล่าวมีขั้นตอนดังนี้

$$\mathrm{F}\left[\cos(\underbrace{2\pi 100\cdot 10^{6}}_{\omega_0}t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\mathrm{sinc}\left(\omega\right)\Big|_{(\omega+\omega_0)\to\omega} + 2\mathrm{sinc}\left(\omega\right)\Big|_{(\omega-\omega_0)\to\omega}\right)$$

$$=\mathrm{sinc}\left(\omega+\omega_0\right)+\mathrm{sinc}\left(\omega-\omega_0\right)$$

คู่การแปลงสำหรับตัวอย่างนี้ จึงเขียนได้เป็น

$$\cos(2\pi 100\cdot 10^{6}t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{sinc}\left(\omega+2\pi 100\cdot 10^{6}\right)+\mathrm{sinc}\left(\omega-2\pi 100\cdot 10^{6}\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-6** พิจารณาสัญญาณ $f\left(t\right)=u(t+\pi)-u(t-\pi)$

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ $\mathrm{F}\left[\frac{d^2 f\left(t\right)}{dt^2}\right]$ (ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 6) Time Differentiation**)

วิธีทำเริ่มจากการสังเกตคู่การแปลงที่ 4) ซึ่งจะได้ว่า

$$\underbrace{u(t+\pi)-u(t-\pi)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{2\frac{\sin\omega\pi}{\omega}}_{F(\omega)} \qquad ,\tau=\pi$$

จากคุณสมบัติที่ 6) เราจะเขียนได้ว่า

$$\mathrm{F}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = (j\omega)^2 \cdot F(\omega)$$

$$= (-\omega^2)\left(\frac{\sin\omega\pi}{\omega}\right)$$

$$= -\omega\sin\omega\pi$$

$$= 2\frac{\sin\omega\pi}{\omega}$$

$$= \pi\delta(\omega-1) + \left(\frac{1}{j(\omega-1)}\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-7** พิจารณาสัญญาณ $f(t) = e^{-2|t|}$ จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ $g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2|t|}\,dt$

(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 7) Time integration**)

วิธีทำเป็นดังนี้

$$\underbrace{e^{-2|t|}}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2(2)}{(2)^2+\omega^2}}_{F(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 6)

$$\mathrm{F}\left[g(t)\right] = \mathrm{F}\left[\int_{-\infty}^{t} \underbrace{e^{-2|t|}}_{f(t)}\,dt\right]$$

$$= \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi\left(F(0)\right)\delta(\omega)$$ *คุณสมบัติที่ 7)

$$= \frac{\dfrac{2(2)}{(2)^2+\omega^2}}{j\omega} + \pi\left(\left.\frac{2(2)}{(2)^2+\omega^2}\right|_{\omega=0}\right)\delta(\omega)$$

$$= \frac{4}{j\omega\left(4+\omega^2\right)} + \pi\left(\frac{4}{4+(0)^2}\right)\delta(\omega) \; = G(\omega)$$

ดังนั้นสำหรับตัวอย่างนี้ เราจึงได้คู่การแปลงฟูเรียร์คือ

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-2|t|}\,dt \Leftrightarrow \frac{4}{j\omega\left(4+\omega^2\right)} + \pi\delta(\omega)$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-8** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $t^2\operatorname{sgn}(t)$
(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 8) Frequency differentiation**)

วิธีทำ

$$\underbrace{\operatorname{sgn}(t)}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{j\omega}}_{F(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 6)

จากคุณสมบัติที่ 8) เราจะเขียนได้ว่า

$$\mathrm{F}\left[t^2 f(t)\right] = \mathrm{F}\left[t^2\operatorname{sgn}(t)\right]$$
$$= (j)^2\frac{d^2F(\omega)}{d\omega^2}$$
$$= -\frac{d^2\left(\frac{2}{j\omega}\right)}{d\omega^2}$$
$$= \frac{d\left(\frac{2}{j\omega^2}\right)}{d\omega}$$
$$= \frac{-4}{j\omega^{-3}}$$

คู่การแปลงฟูเรียร์สำหรับตัวอย่างนี้ก็คือ

$$t^2\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{-4}{j\omega^{-3}}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-9** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $\frac{1}{t^2}$
(ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 9) Duality**)

คุณสมบัติที่ 9 มีใจความสำคัญดังนี้

หาก $\mathrm{F}\left[f(t)\right] = F(\omega)$

แล้ว $\mathrm{F}\left[F(t)\right] = 2\pi f(-\omega)$

ในลักษณะที่ สัญญาณในโดเมนเวลา (โจทย์) ไปมีความคล้ายกับ สัญญาณในโดเมนความถี่ เราจะใช้คุณสมบัติที่ 9) Duality ในการหาผลการแปลง วิธีการใช้คุณสมบัติดังกล่าวสำหรับตัวอย่างนี้ เป็นดังต่อไปนี้

จากคุณสมบัติ 1) Linearity

$$|t|\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)$$

ค่าคงที่จะถูกคูณเข้าทั้งสองฝั่งเพื่อทำให้

สัญญาณในโดเมนความถี่มีความคล้ายกับสัญญาณในโดเมนเวลา (โจทย์) และเราจะได้ว่า

$$\frac{-|t|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega^2}$$

หากพิจารณาตารางที่ 9.2 คุณสมบัติที่ 9 ณ จุดนี้ เราจะได้ว่า

$$f(t) = \frac{-|t|}{2}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2}$$

สัญญาณ $F(t)$ หาได้จากการเปลี่ยนตัวแปร $\omega \to t$ ดังนี้

$$F(t) = \frac{1}{t^2} \quad \text{(ซึ่งก็คือโจทย์)}$$

สัญญาณ $f(-\omega)$ ก็หาได้ในทำนองเดียวกันโดยการเปลี่ยน $t \to -\omega$

$$f(-\omega) = \frac{-|-\omega|}{2}$$

จากคุณสมบัติที่ 9) Duality การแปลงฟูเรียร์สัญญาณ $\frac{1}{t^2}$ ก็จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathrm{F}\left[F(t)\right] = \mathrm{F}\left[\frac{1}{t^2}\right] &= 2\pi f(-\omega) \\ &= 2\pi\left(\frac{-|-\omega|}{2}\right) \\ &= -\pi|\omega| \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงได้คู่การแปลงฟูเรียร์สำหรับตัวอย่างนี้เป็น

$$\frac{1}{t^2} \Leftrightarrow -\pi|\omega|$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-10** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $f(t) = r(t) * s(t)$ เมื่อกำหนดให้ $r(t) = |t|$ และ $s(t) = \mathrm{sgn}(t)$ (ตัวอย่างนี้เน้นการอธิบาย**คุณสมบัติที่ 10) Convolution in** $t$)

วิธีทำ

$$\underbrace{|t|}_{r(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{-2}{\omega^2}}_{R(\omega)} \qquad \text{*คู่การแปลงที่ 5)}$$

$$\underbrace{\operatorname{sgn}(t)}_{s(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{j\omega}}_{S(\omega)}$$ *คู่การแปลงที่ 6)

จากคุณสมบัติที่ 10) การแปลงฟูเรียร์สัญญาณ $f(t) = r(t) * s(t)$ ก็จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}\left[f(t)\right] &= \mathrm{F}\left[r(t) * s(t)\right] \\
&= R(\omega) \cdot R(\omega) \\
&= \frac{-2}{\omega^2} \cdot \frac{2}{j\omega} \\
&= \frac{4}{j\omega^3}
\end{aligned}$$

คู่การแปลงฟูเรียร์สำหรับตัวอย่างนี้ก็คือ

$$|t| * \operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{4}{j\omega^3}$$

เราสามารถกล่าวแบบภาษาพูดได้ว่า สำหรับการแปลงฟูเรียร์ การคอนโวลูชันในโดเมนเวลา มีค่าเท่ากับ การคูณธรรมดาในโดเมนความถี่ สำหรับคุณสมบัติที่ 12) เราก็สามารถกล่าวได้ในทำนองคล้ายกันว่า การคูณในโดเมนเวลา มีค่าเท่ากับ การคอนโวลูชันในโดเมนความถี่ ผู้เขียนมีอีกสี่ตัวอย่างที่เป็นการประยุกต์คุณสมบัติมากกว่า 1 ข้อ โดยผู้เขียนพยายามจะทำให้กระชับยิ่งขึ้น เนื่องจาก (คิดทึกทักไปว่า) ผู้อ่านน่าจะพอเดาทางได้จากตัวอย่างทั้งสิบก่อนหน้า

**ตัวอย่างที่ 9.3-11** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $3u(t+3) + 2\delta(t) - e^{2t} \cdot u(t)$

วิธีทำเป็นดังนี้

| สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $u(t)$ | $\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ | คู่การแปลงที่ 2) |
| $u(t+3)$ | $e^{j3\omega}\left(\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)$ | คุณสมบัติที่ 3) |
| $3u(t+3)$ | $3e^{j3\omega}\left(\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)$ | คุณสมบัติที่ 1) |
| $\delta(t)$ | 1 | คู่การแปลงที่ 1) |
| $2\delta(t)$ | 2 | คุณสมบัติที่ 1) |
| $e^{2t} \cdot u(t)$ | $\frac{1}{-2 + j\omega}$ | คู่การแปลงที่ 7) |

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์จึงมีเขียนได้เป็น

$$\mathrm{F}\left[3u\left(t+3\right)+2\delta\left(t\right)-e^{2t}\cdot u\left(t\right)\right]=\left(\pi\cdot 3e^{j3\omega}\delta(\omega)+\frac{3e^{j3\omega}}{j\omega}\right)+\left(2\right)-\frac{1}{-2+j\omega}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-12** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $u(-t)-u(2t)$

วิธีทำมีรายละเอียดดังนี้

| สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $u(t)$ | $\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ | คู่การแปลงที่ 2) |
| $u(-t)$ | $\frac{1}{\lvert -1\rvert}\left(\pi\cdot\delta\left(\omega/(-1)\right)+\frac{1}{j\left(\omega/(-1)\right)}\right)$ | คุณสมบัติที่ 2) |
| $u(2t)$ | $\frac{1}{\lvert 2\rvert}\left(\pi\cdot\delta\left(\omega/2\right)+\frac{1}{j\left(\omega/2\right)}\right)$ | คุณสมบัติที่ 2) |

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์จึงมีเขียนได้เป็น

$$\mathrm{F}\left[u(-t)-u(2t)\right]=\left(-\pi\cdot\delta\left(-\omega\right)-\frac{1}{j\left(-\omega\right)}\right)-\left(\frac{1}{2}\pi\cdot\delta\left(\omega/2\right)+\frac{1}{2j\left(\omega/2\right)}\right)$$

$$=-\pi\cdot\delta\left(-\omega\right)-\frac{1}{2}\pi\cdot\delta\left(\omega/2\right)-\frac{1}{j\left(-\omega\right)}-\frac{1}{2j\left(\omega/2\right)}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-13** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $\frac{d\left(\mathrm{sgn}\left(4t-1\right)\right)}{dt}-\int_{-\infty}^{t}2\,dt$

วิธีทำเป็นดังนี้

| สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $\mathrm{sgn}(t)$ | $\frac{2}{j\omega}$ | คู่การแปลงที่ 6) |
| $\mathrm{sgn}\left(4t\right)$ | $\frac{1}{\lvert 4\rvert}\left(\frac{2}{j\left(\omega/4\right)}\right)$ | คุณสมบัติที่ 3) |
| $\mathrm{sgn}\left(4\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)=\mathrm{sgn}\left(4t-1\right)$ | $e^{-j(\omega)(1/4)}\left(\frac{1}{\lvert 4\rvert}\frac{2}{j\left(\omega/4\right)}\right)$ | คุณสมบัติที่ 1) |
| $\frac{d}{dt}\left(\mathrm{sgn}(4t-1)\right)$ | $j\omega\cdot\left(e^{-j(\omega)(1/4)}\left(\frac{1}{\lvert 4\rvert}\frac{2}{j\left(\omega/4\right)}\right)\right)$ | คุณสมบัติที่ 6) |
| $2$ | $4\pi\delta\left(\omega\right)$ | คุณสมบัติที่ 3) |

| | | |
|---|---|---|
| $\int_{-\infty}^{t} 2\,dt$ | $\dfrac{4\pi\delta(\omega)}{j\omega}+\pi\big(4\pi\delta(0)\big)\cdot\delta(\omega)$ | คุณสมบัติที่) 7 |

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์จึงมีเขียนได้เป็น

$$\mathrm{F}\left[\frac{d\big(\operatorname{sgn}(4t-1)\big)}{dt}-\int_{-\infty}^{t} 2\,dt\right]$$

$$=\left(j\omega\cdot\left(e^{-j(\omega)(1/4)}\left(\frac{1}{|4|}\frac{2}{j(\omega/4)}\right)\right)\right)-\left(\frac{4\pi\delta(\omega)}{j\omega}+\pi\big(4\pi\delta(0)\big)\cdot\delta(\omega)\right)$$

$$=\left(2\cdot e^{-j\omega/4}\right)-\left(\frac{4\pi\delta(\omega)}{j\omega}\right)-\left(4\pi^2\delta(\omega)\right)$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-14** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $\dfrac{\pi}{t^2-4t+5}$

วิธีทำเป็นดังนี้

$$\frac{\pi}{t^2-4t+5}=\frac{\pi}{t^2-4t+4+1}$$

$$=\frac{\pi}{(t-2)^2+1}$$

| สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $e^{-(1)\|t\|}$ | $\dfrac{2}{1+\omega^2}=\dfrac{2}{\omega^2+1}$ | คู่การแปลงที่ 6) |
| $\dfrac{\pi}{2}e^{-(1)\|t\|}$ | $\dfrac{2}{\omega^2+1}\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{\omega^2+1}\right)$ | คุณสมบัติที่ 1) |
| $\dfrac{\pi}{t^2+1}$ | $2\pi\left(\dfrac{\pi}{2}e^{-(1)\|-t\|}\right)$ | คุณสมบัติที่ 9) |
| $\dfrac{\pi}{(t-2)^2+1}$ | $e^{-j(\omega)(2)}2\pi\left(\dfrac{\pi}{2}e^{-(1)\|-t\|}\right)$ | คุณสมบัติที่ 6) |

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์จึงเขียนได้เป็น

$$\mathrm{F}\left[\frac{\pi}{t^2-4t+5}\right]=e^{-j2\omega}\pi^2 e^{-|t|}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-15** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์***ผกผัน***ของ $\dfrac{\omega^2+1}{\omega^2-1}$

วิธีทำเป็นดังนี้

$$\frac{\omega^2-1}{\omega^2+1}=1-\frac{2}{\omega^2+1}$$
$$=1-\frac{2(1)}{(1)^2+\omega^2}$$

พจน์แรกมีคู่การแปลงฟูเรียร์เป็น $1\Leftrightarrow\delta(t)$ *คู่การแปลงที่ 1

พจน์แรกมีคู่การแปลงฟูเรียร์เป็น $\dfrac{2(1)}{(1)^2+\omega^2}\Leftrightarrow e^{-(1)|t|}$ *คู่การแปลงที่ 9

จากคุณสมบัติที่ 1) เราจึงได้ผลการแปลงฟูเรียร์ผกผัน (เอาสัญญาณในโดเมนความถี่กลับมาเป็นโดเมนเวลา)

$$\mathrm{F}^{-1}\left[\frac{\omega^2+1}{\omega^2-1}\right]=\mathrm{F}^{-1}\left[1-\frac{2(1)}{(1)^2+\omega^2}\right]$$
$$=\mathrm{F}^{-1}[1]-\mathrm{F}^{-1}\left[\frac{2(1)}{(1)^2+\omega^2}\right]$$
$$=\delta(t)-e^{-|t|}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-16** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์***ผกผัน***ของ $u(\omega+1)-u(\omega-1)$

วิธีทำเป็นดังนี้

| สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $u(t+\tau)-u(t-\tau)$ | $\dfrac{2\sin(\omega\tau)}{\omega}$ | คู่การแปลงที่ 4) |
| $\dfrac{2\sin(t\tau)}{t}$ | $2\pi\big(u(-\omega+\tau)-u(-\omega-\tau)\big)$ | คุณสมบัติที่ 9) |
| $\dfrac{2\sin(t)}{t}$ | $2\pi\big(u(-\omega+1)-u(-\omega-1)\big)$ | $\tau=1$ |
| $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)\cdot\dfrac{2\sin(t)}{t}$ | $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)\cdot 2\pi\big(u(-\omega+1)-u(-\omega-1)\big)$ | คุณสมบัติที่ 1) |
| $=\dfrac{\sin(t)}{\pi t}$ | $=u(-\omega+1)-u(-\omega-1)$<br>$=u(\omega+1)-u(\omega-1)$ | |

ผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันจึงมีค่าเท่ากับ

$$\mathrm{F}^{-1}\left[u(-\omega+1)-u(-\omega-1)\right]=\mathrm{F}^{-1}\left[u(\omega+1)-u(\omega-1)\right]$$
$$=\frac{\sin(t)}{\pi t}$$

**ตัวอย่างที่ 9.3-17** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์***ผกผัน***ของ $\dfrac{10}{(j\omega-1)(j\omega-2)}$

เราจะเริ่มต้นโดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{10}{(j\omega-1)(j\omega-2)}=\frac{A}{(j\omega-1)}+\frac{B}{(j\omega-2)}$$
$$=\frac{-10}{(j\omega-1)}+\frac{10}{(j\omega-2)}$$

ขั้นตอนการแปลงสรุปได้ ดังนี้

| สัญญาณในโดเมนเวลา | สัญญาณในโดเมนความถี่ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $e^{-(-1)t}u(t)$ | $\dfrac{1}{(-1)+j\omega}=\dfrac{1}{j\omega-1}$ | คู่การแปลงที่ 7) |
| $e^{-(-2)t}u(t)$ | $\dfrac{1}{j\omega-2}$ | คู่การแปลงที่ 7) |
| $-10\left(e^{t}u(t)\right)+10\left(e^{2t}u(t)\right)$ | $(-10)\dfrac{1}{(j\omega-1)}+(10)\dfrac{1}{(j\omega-2)}$ | คุณสมบัติที่ 1) |

เราจึงได้ว่า

$$\mathrm{F}^{-1}\left[\frac{10}{(j\omega-1)(j\omega-2)}\right]=\mathrm{F}^{-1}\left[\frac{-10}{(j\omega-1)}+\frac{10}{(j\omega-2)}\right]$$
$$=-10e^{t}u(t)+10e^{2t}u(t)$$

ในขั้นตอนการแยกเศษส่วนย่อยนั้นพจน์ $j\omega$ ที่ดูเทอะทะ อาจถูกเปลี่ยนให้เป็นตัวแปร $s$ (ตัวแปรลาปลาซ) ได้ หลังจากนั้น เราก็สามารถทำการแยกเศษส่วนย่อยได้ง่ายขึ้น (เฉกเช่นที่เคยทำไปในหัวข้อ 7.3 เรื่อง การแปลงลาปลาซผกผัน) ผู้อ่านโปรดลองสังเกต ถ้าเราเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $j\omega=s$ และพิจารณาสัญญาณที่เริ่มต้นที่เวลาศูนย์วินาที นิยามของการแปลงฟูเรียร์ ตามสมการที่ 9.3 ก็จะเขียนได้เป็น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

ซึ่งผลลัพธ์ก็คือการแปลงลาปลาซนั่นเอง จากการสืบค้น เราพบว่าการแปลงลาปลาซสามารถถูกพิจารณาได้ว่าเป็นรูปทั่วไปของการแปลงฟูเรียร์ ดังนั้น เราจะสรุปก่อนปิดท้ายบทนี้ว่า หากผู้อ่านเข้าใจการแปลงลาปลาซที่กล่าวไว้ในบทที่ 7 การแปลงฟูเรียร์ก็คงสามารถทำความเข้าใจได้ ในทำนองเดียวกัน

# แบบทดสอบความเข้าใจ

ข้อความต่อไปนี้กล่าวถูกต้องหรือไม่ ?

1 การแปลงฟูเรียร์สามารถใช้กับสัญญาณไม่เป็นรายคาบได้

2 การแปลงฟูเรียร์ถูกนิยามอยู่ในรูปอนุพันธ์

3 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ถูกเรียกว่าคู่การแปลงฟูเรียร์

4 การแปลงฟูเรียร์ผกผัน คือการแปลง $f(t)$ ให้กลายเป็น $F(\omega)$

5 ผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย คือฟังก์ชันค่าคงที่ โดยที่ค่าคงที่นั้นมีค่าเท่ากับ 1

6 ผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันค่าคงที่ คือ ฟังก์ชันขั้น 1 หน่วย

7 ผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันไซน์เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย

8 ผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันไซน์เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย

9 การแปลงฟูเรียร์มีคุณสมบัติเชิงเส้น

10 $F\left[f_1(t) f_2(t)\right] = F_1(\omega) F_2(\omega)$

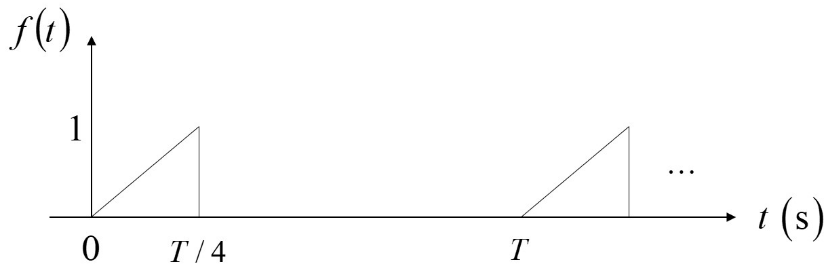
**ข้อแนะนำ**

หากท่านตอบว่า **ถูก** ควรตอบพร้อมเหตุผล แต่ หากท่านตอบว่า **ไม่ใช่** ควรต้องมีข้อขัดแย้ง

# แบบฝึกทักษะ

**9.1 นิยามของการแปลงฟูเรียร์**

1. พิจารณาสัญญาณรายคาบต่อไปนี้




หากกำหนดให้คาบสามารถปรับเปลี่ยนได้ 3 ค่า คือ $T=1$, $T=10$ และ $T=100$ วินาที จงหา

- ระยะห่างของฮาร์โมนิคที่อยู่ติดกัน (ในหน่วย Hz)
- ภาพร่างของสเปกตรัมของแอมพลิจูด

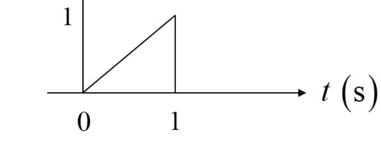
**9.2 การแปลงฟูเรียร์เชิงปริพันธ์**

2. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $e^{jt}$ โดยการใช้นิยาม

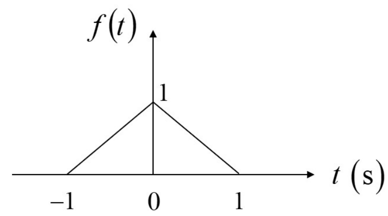
3. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $e^{-t}$ โดยการใช้นิยาม

4. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของของสัญญาณ $1+\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ โดยการใช้นิยาม

5. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของของสัญญาณไม่เป็นรายคาบต่อไปนี้ โดยใช้นิยาม



6. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของของสัญญาณไม่เป็นรายคาบต่อไปนี้ โดยใช้นิยาม




7. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\delta(\omega)$ โดยการใช้นิยาม

8. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\dfrac{10}{1+j\omega}$ โดยการใช้นิยาม

**9.3 คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์**

9. พิจารณาสัญญาณในโดเมนเวลาต่อไปนี้

$$h(t)=\frac{\sin \tau t}{t}$$

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ $\dfrac{dh(t)}{dt}$ โดยใช้ตารางคู่การแปลงฟูเรียร์และคุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์

10. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณในโดเมนเวลาต่อไปนี้

$$h(t)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t\tau}{t}\,dt$$

โดยใช้ตารางคู่การแปลงฟูเรียร์และคุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์

11. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณในโดเมนเวลาต่อไปนี้

$$f(t)=\frac{2\sin t}{t}+1$$

โดยใช้ตารางคู่การแปลงฟูเรียร์และคุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์

12. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้คุณสมบัติ

$$f(t) = t^2 \cos\left(2t + 30^\circ\right) u(t) + 5u\left(\frac{t}{2}\right)$$

13. จงแสดงวิธีการหาผลการแปลงฟูเรียร์โดยใช้คุณสมบัติ

$$f(t) = \delta(t+3) + \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t-1)\,dt - \cos\left(at - \frac{\pi}{3}\right)$$

14. จงแสดงวิธีการหาผลการแปลงฟูเรียร์โดยใช้คุณสมบัติ

$$f(t) = \frac{8}{4+t^2} - \frac{10^{-2}}{t^2}$$

15. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\delta(\omega) + 2\cos(2\omega)$

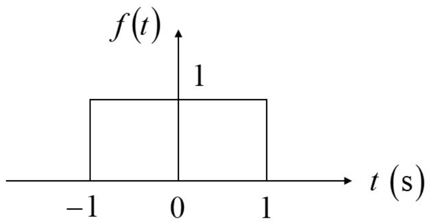
16. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\dfrac{10j\omega + 4}{-\omega^2 + 6j\omega + 8}$

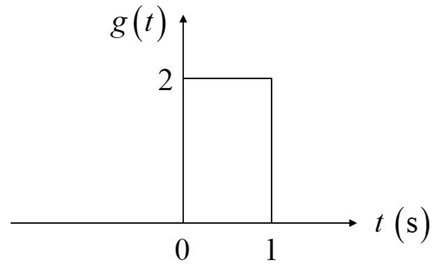
17 จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\dfrac{1}{j\omega(j\omega + 10)}$

18 จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\dfrac{\delta(\omega + 2)}{j\omega(j\omega + 1)}$

19 จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\dfrac{\delta(\omega)}{(j\omega + 2)(j\omega + 5)}$

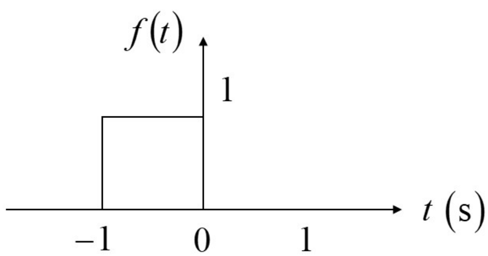
20. พิจารณาภาพสัญญาณสองภาพต่อไปนี้

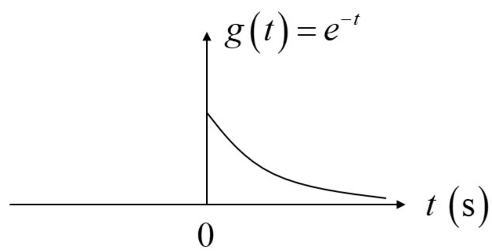



จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $f(t)*g(t)$

21. พิจารณาภาพสัญญาณสองภาพต่อไปนี้




จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $f(t)g(t)$

22. หาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณในโดเมนเวลาต่อไปนี้

$$e^{-2t-2}\sin(3t-3)u(t-1)\cdot\cos(2\pi t)$$